Проф. А. П. ПОЛЯКОВ

КУРС
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА
МОСКВА — 1928

Мосгублит № 50290 Тираж 4000 экз.

Типография Госиздата „Красный Пролетарий“, Москва, Пименовская, дом 16.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящее руководство по дифференциальному и интегральному исчислениям предназначено для студентов высших технических учебных заведений и имеет своей целью не только сообщить им необходимый для прохождения технических курсов материал и необходимые для этого навыки, но также и предоставить им способы овладения хотя бы в самых минимальных размерах методами математики для решения задач прикладного характера. При составлении этого учебника, с одной стороны, имелось в виду основное положение, которое было выдвинуто на последнем международном конгрессе, посвященном вопросам преподавания математики в высших технических учебных заведениях: „Математика является одним из самых могучих орудий господства человеческого гения над косной материей“, с другой стороны — указание Наркомпроса: „Развитие интеллекта достигается не путем приобретения большого количества сведений от учителя или из учебника, а самостоятельной работой над живыми проблемами“.

В виду этого при составлении курса поставлена была цель дать будущим инженерам общее математическое развитие с техническим уклоном; последнее надо понимать не в том смысле, что в курсе решаются вопросы технического характера, а в том смысле, что весь курс проникнут, если можно так выразиться, техническим настроением. Постановка в учебнике по высшей математике, предназначенном для высших технических учебных заведений, технических задач не возможна уже потому, что студенты младших курсов, на которых по существующим учебным планам заканчивается прохождение высшей математики, мало еще подготовлены к пониманию их. Между тем прогрессирующее развитие техники требует от инженеров все более и более солидной математической подготовки. В виду этого в курсе почти нет таких пунктов, где будущему инженеру преподносились бы готовые результаты без вывода их: если бы был избран последний способ преподавания, то окончивший высшее техническое учебное заведение, может быть, и обладал бы знанием формул и теорем в большом количестве, но это знание было бы мертвым капиталом в виду того, что он не был бы в состоянии применять не только математические методы, но даже и эти самые формулы и теоремы. В самом деле, не умея разобраться в их выводах, он не сумел бы установить при каких условиях эти формулы и теоремы применимы.

Следует отметить, что в курсе нет и другой крайности — увлечения тонкостями математических доказательств; наоборот, в большом объеме введена интуиция в широком значении этого слова с целью воспитать в будущем инженере чувство реального в смысле ясного представления конкретного значения не только результатов аналитических выкладок, но и самого хода этих выкладок. Но все-таки интуиция не оттесняет на задний план логическую сторону доказательств, выводов и т. д.; курс по возможности строился таким образом, чтобы интуиция и логика сочетались в нем гармонично.

В сответствии с этим при составлении курса придавалось большое значение правильной постановке лекций и групповых занятий, без чего он теряет свой смысл, так как назначение его—служить пособием именно для тех студентов, которые прорабатывают курс на лекциях и на групповых занятиях, и помочь им в двух направлениях: 1) дать им в руки краткое изложение сообщенного в аудитории, 2) подготовить их к пониманию курсов и книг с научным содержанием. Это обстоятельство, а также желание возможно более сделать доступной по цене книгу заставили отказаться от помещения в ней пропедевтики каждого отдела и задач. Все это студент должен получить в исчерпывающем объеме на лекциях и, в особенности, на групповых занятиях, так как никакой учебник не может послужить заменой живого обмена мыслей между преподавателем и аудиторией.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 1

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.

1. Последовательность. Предел последовательностей 3
2. Теоремы теории пределов последовательностей 6
3. Величины постоянные и переменные 12
4. Непрерывное и прерывное изменение 13
5. Бесконечно малая (умаляющаяся) величина 13
6. Бесконечно большая величина 13
7. Предел переменной 14
8. Теоремы теории пределов 15
9. Независимое переменное, аргумент и функция 21
10. Геометрическое представление функции 22
11. Непрерывная функция 23
12. Алгебраические и трансцендентные функции 25
13. Элементарные функции 27

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Глава I. **Первоначальные понятия.**

1. Производная; геометрический смысл ее 33
2. Обозначения производной 35
3. Механический смысл производной 36
4. Основные теоремы и формулы дифференцирования 37
5. Производные основных элементарных функций 42
6. Производные высших порядков 47

Глава II. **Основные теоремы.**

1. Теорема Ролля 50
2. Теорема Лагранжа 52
3. Теорема Коши 53
4. Теорема Тэлора 54
5. Свойства функций 57

Глава III. **Исследование функции и ее графики.**

1. Основные понятия 59
2. Возрастающая и убывающая функции 61
3. Максимум и минимум (первый прием нахождения) 62
4. Максимум и минимум (второй прием нахождения) 64
5. Вогнутость, выпуклость и точки перегиба кривой 65

Глава IV. **Вычисление предельных значений.** *Стр.*

1. Основные понятия 69
2. Неопределенное выражение вида $\frac{0}{0}$ 70
3. Неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$ 72
4. Неопределенное выражение вида $0\cdot\infty$ 74
5. Неопределенное выражение вида $\infty-\infty$ 74
6. Неопределенное выражение 1^∞, ∞^0, 0^0 75
7. Вычисление предельного значения функции при помощи разложения по формуле Тэлора 76

Глава V. **Разложение функций по формуле Тэлора.**

1. Целая рациональная функция 77
2. Показательная функция 78
3. Тригонометрическая функция косинус 79
4. Тригонометрическая функция синус 79
5. Логарифмическая функция 80
6. Степень бинома (двучлена) 81
7. Понятие о ряде Тэлора 83

Глава VI. **Дифференциал.**

1. Бесконечно малые различных порядков 85
2. Основные понятия, связанные с дифференциалом; геометрическое значение его 88
3. Основные теоремы и формулы 89
4. Дифференциалы основных элементарных функций 91
5. Дифференциалы высших порядков 92
6. Преимущества пользования дифференциалом 93
7. Замена переменных 94
8. Формула и ряд Тэлора 96

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Глава I. **Неопределенный интеграл.**

1. Основные понятия 99
2. Связь между дифференцированием и интегрированием . . . 103
3. Интегралы функций, начальные которых—основные элементарные 103
4. Основные теоремы и формулы 104
5. Основные задачи теории неопределенных интегралов 105
6. Основные методы интегрирования 105

Глава II. **Определенный интеграл.**

1. Возникновение понятия определенного интеграла 112
2. Производная определенного интеграла по верхнему пределу 116
3. Связь определенного интеграла с начальной функцией от подъинтегральной 117
4. Связь определенного интеграла с неопределенным 117
5. Обобщение понятия определенного интеграла 118
6. Основные теоремы и формулы 122

Глава III. **Дифференциальная геометрия.**

1. Вычисление площадей в декартовых координатах 127
2. Теорема о пределе суммы бесконечно малых величин . . . 130
3. Вычисление площадей в полярных координатах 131

Стр.

4. Длина дуги в декартовых координатах 132
5. Длина дуги в полярных координатах 136
6. Касательная в декартовых координатах 137
7. Касательная в полярных координатах 140
8. Радиус кривизны в декартовых координатах 141
9. Радиус кривизны в полярных координатах 145

Глава IV. **Интегрирование дифференциальных уравнений.**

1. Основные понятия 147
2. Дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые разделением переменных 148
3. Дифференциальные уравнения второго порядка 151
4. Линейные дифференциальные уравнения 156

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

1. Частные производные и частные дифференциалы первого порядка 163
2. Полный дифференциал первого порядка 166
3. Полный дифференциал и производная сложной функции одного независимого переменного 167
4. Полный дифференциал и частные производные сложной функции нескольких независимых переменных 169
5. Частные производные высших порядков 171
6. Полные дифференциалы высших порядков 173
7. Замена переменных 174
8. Минимум и максимум (необходимое условие) 176
9. Минимум и максимум (достаточное условие) 178
10. Относительный экстремум 182
11. Формула Тэлора 184
12. Неявные функции 186
13. Дифференциальные выражения 188

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Глава I. **Линии двоякой кривизны.**

Введение 191
1. Длина дуги 193
2. Касательная прямая и нормальная плоскость 196
3. Соприкасающаяся плоскость и бинормаль 197
4. Главная нормаль 199
5. Первая кривизна 201
6. Вторая кривизна 202

Глава II. **Поверхности.**

1. Нормаль и касательная плоскость 203
2. Объем цилиндра 206
3. Объем тела 207
4. Объем кривого цилиндра 208
5. Объем тела вращения 212
6. Проекция плоской фигуры на другую плоскость 213

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ.

ИНТЕГРАЛЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ.

Глава I. **Двойные интегралы.** *Стр.*

1. Возникновение понятия двойного интеграла 215
2. Связь двойного интеграла с двукратным в случае декартовых координат 219
3. Связь двойного интеграла с двукратным в случае полярных координат 219

Глава II. **Определенный интеграл как функция параметра.**

1. Интегрирование интеграла по параметру 222
2. Дифференцирование интеграла по параметру 223

Глава III. **Геометрические приложения двойных интегралов.**

1. Вычисление объемов (кубатура) 225
2. Вычисление поверхностей (компланация) 226
3. Площадь поверхности тела вращения 228

Глава IV. **Тройные интегралы.**

1. Возникновение понятия тройного интеграла 230
2. Связь тройного интеграла с трекратным в случае декартовых координат 231
3. Связь тройного интеграла с трекратным в случае полярных координат 234

Глава V. **Механические приложения интегрального исчисления.**

1. Центр тяжести 236
2. Момент инерции 238

ЧАСТЬ СЕДЬМАЯ.

РЯДЫ.

1. Основные понятия 241
2. Положительные ряды 244
3. Абсолютно сходящиеся ряды 248
4. Равномерно сходящиеся ряды 249
5. Степенные ряды 250
6. Разложение функций в степенные ряды 254

ЧАСТЬ ВОСЬМАЯ.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.

1. Ряды 261
2. Формулы трапеций и парабол 263
3. Приборы 266

ЧАСТЬ ДЕВЯТАЯ.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

1. Геометрическое изображение 267
2. Обобщение понятия о степени 268
3. Гиперболические функции 270

Таблица формул 273
Указатель 284

ВВЕДЕНИЕ.

Естествоиспытатель, в частности инженер, изучая тот или другой вопрос, то или другое явление, старается построить схему, модель его; это построение признается вполне удовлетворяющим своему назначению — разрешить поставленную задачу, если оно воспроизводит данное явление достаточно верно в соответствии с современным состоянием знаний. Могучим орудием для построения такого рода моделей служит математика, применение которой при современном состоянии естествознания и техники не может ограничиться элементарными методами. Это вытекает уже из того, что основные понятия и методы высшей математики возникли еще в первой половине XVII столетия при разрешении задач прикладного характера, выходящих за пределы применения элементарной математики. Так, еще до Ньютона и Лейбница, создателей дифференциального и интегрального исчислений, ученые, например, Ферма, в действительности пользовались уже исчислением бесконечно малых для решения механических и геометрических задач; не было только общего метода, а был ряд методов в применении к различным вопросам. Ньютон и Лейбниц дали этот общий метод в чистом виде вне всякой зависимости от той или другой задачи. На этом отвлечении и зиждется мощь математики. Благодаря ему Ньютон и Лейбниц дали метод, при помощи которого, как справедливо указывает знаменитый математик Гаусс, человек средних способностей может разрешать почти механически столь сложные задачи, перед которыми без такого орудия даже гений был бы бессилен.

В виду выяснившегося большого значения математики для естествознания и техники, сделаем обзор основных понятий и методов ее. В основе математики, как известно, лежит счет, который в дальнейшем своем развитии приводит к сложению и вычитанию, умножению и делению, возвышению в степень и извлечению корня, а затем уже к дифференциальному и интегральному исчислениям; эти исчисления и составляют основу того, что называется высшей математикой. Последняя имеет дело с бесконечным процессом, к которому она переходит с помощью теории пределов. Объектом математики служит результат счета — целое положительное число, а затем его обобщения: отрицательное, дробное, иррациональное и комплексное числа. При этом объектом исследования высшей математики является не только постоянная величина, имеющая определенное числовое значение, но и переменная, т.-е. такая, которая получает различные числовые значения. Таким образом, математика служит орудием для познания природы в том смысле, что она дает возможность охватить данное явление во всем его разнообразии в целом. Но математика является орудием для познания природы еще и в другом смысле: она связывает ряд явлений друг с другом—одни, как причины, другие, как следствия, и таким образом дает возможность разобраться не только во всем разнообразии одного явления, но в разнообразии совокупности целого ряда явлений. Средством для достижения этого служит понятие о функции; функция представляет как бы математическую модель, изображающую соотношение между двумя или несколькими явлениями.

Таким образом, основными математическими понятиями являются число, предел и функция.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Введение в анализ.

§ 1. Последовательность. Предел последовательности.

В элементарной математике подробно рассматриваются рациональные (соизмеримые) числа, т. е. целые, дробные, положительные и отрицательные, в виду чего на их свойствах мы останавливаться не станем.

Рассмотрим теперь такие (бесконечные) последовательности соизмеримых чисел:

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \ldots\ldots,\frac{(-1)^n}{n},\ \ldots\ldots; \tag{1}$$

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots\ldots,\frac{n-1}{n},\ \ldots\ldots; \tag{2}$$

$$1{,}5;\quad 1{,}58;\quad 1{,}587;\quad 1{,}5874;\quad 1{,}58740;\ \ldots\ldots; \tag{3}$$

$$1{,}6;\quad 1{,}59;\quad 1{,}588;\quad 1{,}5875;\quad 1{,}58741;\ \ldots\ldots; \tag{4}$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\ldots,(-1)^{n-1},\ \ldots\ldots; \tag{5}$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\ldots,n,\ \ldots\ldots \tag{6}$$

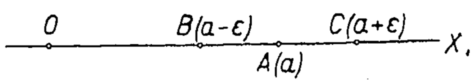
и вообще

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots,u_n,\ \ldots\ldots, \tag{7}$$

где должен быть указан закон образования общего члена u_n по его номеру n.

Так, в последовательностях (1), (2), (5) и (6) общий член равен соответственно $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{n-1}{n}$, $(-1)^{n-1}$ и n, а в последовательностях (3) и (4)—приближенным значениям $\sqrt[3]{4}$ соответственно по недостатку и по избытку с n десятичными знаками.

Говорят, что последовательность (7) имеет пределом число a или стремится к числу a, если для всякого сколь угодно малого наперед заданного положительного числа ε можно найти такое число N, что все члены, номера которых больше N, лежат в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ (см. фиг. 1),



Фиг. 1.

т.-е. между числами $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$. Эту же мысль можно выразить таким образом: для $n>N$ $|u_n-a|<\varepsilon$ *).

Последовательность (1) имеет пределом нуль, так как

$$\left|0-\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

У последовательности (2) пределом служит 1, так как

$$\left|1-\frac{n-1}{n}\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как нет рационального числа, к которому стремилась бы последовательность (3) или (4), то у них нет предела в том смысле, как это мы понимали до сих пор. Но, как легко видеть, для каждой пары приближенных значений $\sqrt[3]{4}$ — одного по недостатку, другого по избытку — существует такое число N, что для $n>N$ все члены обеих последовательностей (3) и (4) заключены между этими двумя приближенными значениями, например, для $n>2$ все члены последовательностей (3) и (4) заключены между 1,58 и 1,59; тогда совершенно естественно расширить понятие о пределе последовательности в том смысле, что последовательности (3) и (4) имеют пределом несоизмеримое число, которое представляет значение символа $\sqrt[3]{4}$.

На этом примере мы убеждаемся, что могут быть такие две последовательности

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots, \tag{7}$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ldots,\ v_n,\ \ldots\ldots; \tag{8}$$

что члены их удовлетворяют неравенствам

$$u_1<u_2<u_3<\ldots<u_{n-1}<u_n<v_n<v_{n-1}<\ldots\ldots<v_2<v_1$$

для какого угодно n, а последовательность

$$v_1-u_1,\quad v_2-u_2,\quad v_3-u_3,\ \ldots\ldots,\ v_n-u_n\ \ldots\ldots \tag{9}$$

стремится к нулю, т.-е. для $n>N$

$$|v_n-u_n|<\varepsilon. \tag{10}$$

Тогда могут быть два случая. Во-первых, существует соизмеримое число a, удовлетворяющее при всяком n неравенствам

$$u_n<a<v_n \tag{11}$$

и, следовательно (10), для $n>N$ неравенствам

$$|u_n-a|<|u_n-v_n|<\varepsilon, \qquad |v_n-a|<|v_n-u_n|<\varepsilon,$$

так что последовательности (7) и (8) имеют общим пределом, согласно данному определению его, соизмеримое число a. Во-вторых, не существует соизмеримого числа a, удовлетворяющего неравенствам (11) при всяком n;

*) Модуль или, что то же, абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$; например, $|+2|=2$, $|-2|=2$.

тогда говорят, что последовательности (7) и (8) определяют несоизмеримое число a, удовлетворяющее неравенствам (11); отсюда вытекает, например, что последовательности (3) и (4) определяют несоизмеримое число, представляющее значение символа $\sqrt[3]{4}$. Таким образом, и во втором случае у последовательностей (7) и (8) существует предел; только последним служит иррациональное (несоизмеримое) число, которое определяется этими последовательностями.

На основании всего этого мы можем сказать, что последовательность (7) имеет пределом число a (все равно, будет ли это число рациональное или иррациональное), если разность $u_n - a$ стремится к нулю, т.-е. если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое число N, что для $n > N$

$$|u_n - a| < \varepsilon. \tag{12}$$

Отсюда же мы видим, что если последовательность (7) имеет пределом число a, то последовательности

$$a - u_1,\ a - u_2,\ a - u_3,\ \ldots\ldots,\ a - u_n,\ \ldots. \tag{7'}$$

и

$$u_1 - a,\ u_2 - a,\ u_3 - a,\ \ldots\ldots,\ u_n - a,\ \ldots. \tag{7''}$$

имеют пределом нуль.

Так, последовательность (2) стремится к 1, последовательности же

$$1 - 0,\quad 1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{2}{3},\ \ldots\ldots,\ 1 - \frac{n-1}{n},\ \ldots,$$

$$0 - 1,\ \frac{1}{2} - 1,\ \frac{2}{3} - 1,\ \ldots\ldots,\ \frac{n-1}{n} - 1,\ \ldots,$$

т.-е.

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \tag{2'}$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots,\ -\frac{1}{n},\ \ldots, \tag{2''}$$

имеют пределом 0.

Рассмотрим теперь последовательность (5); она не имеет предела, так как нет такого числа a (рационального или иррационального), для которого одновременно существовали бы неравенства

$$|1 - a| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |-1 - a| < \varepsilon.$$

Наконец, последовательность (6) тоже не имеет предела, так как члены ее с ростом номера растут неограниченно, т.-е. становятся больше всякого наперед заданного числа.

Эту мысль выражают, говоря, что „последовательность (6) имеет пределом ∞, т.-е. бесконечность".

Пользуясь символом ∞, мы можем мысль, что последовательность (7) имеет пределом (по латыни *limes*) число a, выразить таким образом:

$$\text{пред}_{n=\infty} u_n = a \quad \text{или} \quad lim_{n=\infty} u_n = a, \tag{VII}$$

где подстрочное равенство $n=\infty$ указывает, что номер n стремится к бесконечности (∞), т.-е. неограниченно растет; мы будем обозначать этот процесс символом $n\to\infty$ и, следовательно, будем писать вместо равенств (VII):

$$\text{пред.}_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{и} \quad lim_{n\to\infty} u_n = a.$$

Таким образом,

$$lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0; \tag{I}$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1. \tag{II}$$

Мы дали только понятие об определении иррационального числа при помощи последовательностей, развивать же теорию иррационального числа мы не станем. Заметим только, что при помощи последовательностей можно дать определение равенства и неравенства иррациональных чисел, а также всех действий над ними.

Точно так же мы не будем излагать теорию дальнейшего обобщения понятия о числе — комплексного числа.

В аналитической геометрии устанавливается взаимно однозначное соответствие между (действительным) числом и точкой на прямой: каждой точке на прямой соответствует единственное число и, обратно, каждому числу соответствует единственная точка на прямой. Ввиду этого в анализе часто слово „число" заменяют словом „точка". Например, говорят, что нуль служит точкой разрыва дроби $\frac{1}{x}$, вместо того, чтобы сказать, что нуль служит тем числовым значением знаменателя дроби $\frac{1}{x}$, при котором дробь эта обращается в бесконечность, т.-е. что дробь $\frac{1}{x}$ неограниченно растет, если знаменатель ее x приближается к нулю.

§ 2. Теоремы теории пределов последовательностей.

Дадим предварительно некоторые определения.

Если члены последовательности таковы, что каждый из них не меньше предыдущего, то последовательность называется возрастающей. Так, последовательности (2), (3) и (6) возрастающие.

Если члены последовательности таковы, что каждый из них не больше предыдущего, то последовательность называется убывающей. Так, последовательность (4) убывающая.

Возрастающая и убывающая последовательности называются монотонными, все остальные колеблющимися. Так, последовательности (1) и (5) колеблющиеся.

Для того, чтобы иметь возможность устанавливать существование предела, примем без доказательства такую теорему.

Монотонная последовательность, все члены которой заключены в конечном интервале, имеет предел внутри этого интервала.

На основании этой теоремы мы можем заключить, что последовательность (2) имеет предел в интервале (0, 1), так как члены (2) находятся в этом интервале; по той же причине у последовательностей (3) и (4) существует предел, и он заключен в интервале (1,5; 1,6).

Рассмотрим в виде примера еще такую последовательность:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^3, \left(1+\frac{1}{3}\right)^4, \left(1+\frac{1}{4}\right)^5, \left(1+\frac{1}{5}\right)^6, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ldots \quad (13)$$

т.-е.

$$4,\ 3^3/_8,\ 3^{13}/_{81},\ 3^{53}/_{1024},\ 2^{15406}/_{15625}, \ldots\ldots,$$

и покажем, что она убывающая, т.-е. что

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (14)$$

Для этого воспользуемся неравенством

$$(1+a)^n > 1+na, \quad (15)$$

где $a > -1$ и n — целое положительное число. В самом деле, $(1+a)^2 > 1+2a$, так как $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$. Положим теперь, что неравенство (15) верно и, помня, что $1+a > 0$, умножим обе части его на $1+a$:

$$(1+a)^{n+1} > (1+na)(1+a)$$

или

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a+na^2,$$

откуда

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a. \quad (15')$$

Неравенство (15) имеет место при $n=2$, следовательно, ввиду неравенства (15'), и при $n=3$, $n=4$, $n=5$ и т. д.

Положим в неравенстве (15) $a=\frac{1}{n^2-1}$:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\frac{1}{n^2-1}. \quad (14')$$

Так как

$$1+\frac{1}{n^2-1} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2},$$

то неравенство (14') принимает вид:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1+\frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем неравенство (14).

Итак, последовательность (13)—монотонная, и, так как первый член ее равен 4 и все члены ее положительны, то они заключены в интервале (0, 4); следовательно, она имеет предел внутри интервала (0, 4)*); предел этот обозначается буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e. \tag{13$_1$}$$

Докажем теперь несколько теорем из теории пределов последовательностей.

Теорема 1. Если последовательности

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots,u_n,\ \ldots\ldots, \tag{16}$$

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ldots,v_n,\ \ldots\ldots \tag{17}$$

имеют пределом нуль, то ему же равен предел последовательности

$$u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3,\ \ldots,\ u_n+v_n,\ \ldots \tag{18}$$

В самом деле, если последовательности (16) и (17) стремятся к нулю, то для всякого наперед заданного положительного числа ε можно найти такое число N, что для $n>N$

$$|u_n|<\frac{1}{2}\varepsilon \text{ и } |v_n|<\frac{1}{2}\varepsilon;$$

отсюда следует, что $|u_n|+|v_n|<\varepsilon$; так как $|u_n+v_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$**), то

$$|u_n+v_n|<\varepsilon,$$

т.-е. последовательность (18) стремится к нулю.

Очевидно, что эту теорему можно распространить на число последовательностей, большее двух.

ПРИМЕР. Последовательности

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots\ldots,\frac{1}{2^n},\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \ldots\ldots,\frac{1}{3^n},\ \ldots\ldots$$

имеют пределом нуль. Следовательно, последовательности

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{4}+\frac{1}{9},\ \ldots\ldots,\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n},\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{4}-\frac{1}{9},\ \ldots\ldots,\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n},\ \ldots\ldots,$$

т.-е.

$$\frac{5}{6},\ \frac{13}{36},\ \ldots\ldots,\frac{3^n+2^n}{6^n},\ \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{6},\ \frac{5}{36},\ \ldots\ldots,\frac{3^n-2^n}{6^n},\ \ldots$$

имеют пределом тоже нуль.

*) Уже пятый член последовательности (13) показывает, что предел лежит в интервале (0, 3).

**) В самом деле, $|-2+5|<|-2|+|+5|$, $|-2-5|=|-2|+|-5|$.

Теорема 2. Если последовательность

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \qquad (19)$$

имеет пределом нуль, а модули членов последовательности

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots \qquad (20)$$

меньше положительного числа M, то последовательность

$$u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3, \ldots, \quad u_n v_n, \ldots \qquad (21)$$

тоже имеет пределом нуль.

Действительно, подбираем числа ε и N так, что при $n > N$

$$|u_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

или

$$M\,|u_n| < \varepsilon;$$

так как $|v_n| < M$ и $|u_n|\,|v_n| = |u_n v_n|$ *), то $|u_n v_n| < M|u_n|$ и, следовательно,

$$|u_n v_n| < \varepsilon.$$

Примечание. Если последовательность (20) имеет пределом число a, то члены ее конечны и не могут расти неограниченно; следовательно, модули их меньше некоторого положительного числа M. Таким образом, и в этом частном случае теорема 2 сохраняет свою силу.

ПРИМЕР. Последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots,$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$$

стремятся к нулю, а последовательность

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

имеет пределом 1; следовательно, последовательности

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}, \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\cdot 5, \quad \frac{1}{4}\cdot 5, \quad \frac{1}{8}\cdot 5, \ldots, \frac{1}{2^n}\cdot 5, \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2, \quad \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}, \ldots, \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n}, \ldots,$$

т. е.

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{36}, \quad \frac{1}{216}, \ldots, \frac{1}{6^n}, \ldots,$$

$$\frac{5}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{5}{8}, \ldots, \frac{5}{2^n}, \ldots,$$

*) В самом деле, $|-2|\,|+5| = |(-2)\cdot(+5)|$.

$$1, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{6}, \ldots\ldots, \frac{n+1}{n\cdot 2^n}, \ldots\ldots$$

стремятся к нулю.

Теорема 3. Пусть последовательности

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots, \tag{22}$$
$$v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n, \ldots\ldots \tag{23}$$

имеют пределами соответственно числа a и b; тогда последовательности

$$u_1+v_1, \quad u_2+v_2, \quad u_3+v_3, \ldots\ldots, u_n+v_n, \ldots\ldots \tag{24}$$
$$u_1-v_1, \quad u_2-v_2, \quad u_3-v_3, \ldots\ldots, u_n-v_n, \ldots\ldots, \tag{25}$$
$$u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3, \ldots\ldots, u_n v_n, \ldots\ldots, \tag{26}$$
$$\frac{u_1}{v_1}, \quad \frac{u_2}{v_2}, \quad \frac{u_3}{v_3}, \ldots\ldots, \frac{u_n}{v_n}, \ldots\ldots \tag{27}$$

имеют пределами соответственно сумму $a+b$, разность $a-b$, произведение ab и частное $\frac{a}{b}$.

В самом деле, последовательности

$$u_1-a, \quad u_2-a, \ldots\ldots, u_n-a, \ldots\ldots, \tag{22'}$$
$$v_1-b, \quad v_2-b, \ldots\ldots, v_n-b, \ldots\ldots \tag{23'}$$

стремятся к нулю (§ 1), по теореме же 1-й стремится к нулю и последовательность

$$(u_1-a)+(v_1-b), \quad (u_2-a)+(v_2-b), \ldots, (u_n-a)+(v_n-b), \ldots$$

или, что то же,

$$(u_1+v_1)-(a+b), \quad (u_2+v_2)-(a+b), \ldots, (u_n+v_n)-(a+b), \ldots \tag{24'}$$

и, таким образом, последовательность (24) имеет пределом сумму $a+b$.

По той же теореме 1-й, последовательность

$$(u_1-a)-(v_1-b), \quad (u_2-a)-(v_2-b), \ldots, (u_n-a)-(v_n-b), \ldots$$

или, что то же,

$$(u_1-v_1)-(a-b), \quad (u_2-v_2)-(a-b), \ldots, (u_n-v_n)-(a-b), \ldots \tag{25'}$$

имеет пределом нуль; в виду этого последовательность (25) стремится к разности $a-b$.

По теореме 2-й, последовательности

$$v_1(u_1-a), \quad v_2(u_2-a), \ldots\ldots, v_n(u_n-a), \ldots\ldots, \tag{22''}$$
$$a(v_1-b), \quad a(v_2-b), \ldots\ldots, a(v_n-b), \ldots\ldots \tag{23''}$$

стремятся к нулю; вследствие этого по теореме 1-й стремится к нулю последовательность

$$v_1(u_1-a)+a(v_1-b), \; v_2(u_2-a)+a(v_2-b), \ldots, \; v_n(u_n-a)+a(v_n-b), \ldots$$

или, что то же,

$$u_1 v_1 - ab, \quad u_2 v_2 - ab, \ldots\ldots, u_n v_n - ab, \ldots\ldots \tag{26'}$$

Таким образом, пределом последовательности (26) служит произведение ab.

По теореме 2-й, последовательности

$$\frac{1}{v_1}(u_1-a),\ \frac{1}{v_2}(u_2-a),\ldots\ldots,\frac{1}{v_n}(u_n-a),\ldots\ldots, \tag{22'''}$$

$$\frac{a}{bv_1}(v_1-b),\ \frac{a}{bv_2}(v_2-b),\ldots\ldots,\frac{a}{bv_n}(u_n-b),\ \ldots\ldots \tag{23'''}$$

стремятся к нулю при условии, что модули членов последовательности

$$\frac{1}{v_1},\ \frac{1}{v_2},\ldots\ldots,\frac{1}{v_n},\ldots\ldots \tag{23^{IV}}$$

меньше некоторого положительного числа M или, что то же, последовательность (23) не стремится к нулю, т.-е. $b\neq 0$.

По теореме 1-й, последовательность

$$\frac{1}{v_1}(u_1-a)-\frac{a}{bv_1}(v_1-b),\ldots,\ \frac{1}{v_n}(u_n-a)-\frac{a}{bv_n}(v_n-b),\ldots$$

или, что то же,

$$\frac{u_1}{v_1}-\frac{a}{b},\ \frac{u_2}{v_2}-\frac{a}{b},\ldots\ldots,\frac{u_n}{v_n}-\frac{a}{b},\ldots\ldots \tag{27'}$$

стремится к нулю. Таким образом, пределом последовательности (27) служит частное $\frac{a}{b}$ при условии, что $b\neq 0$.

Очевидно, что эти теоремы можно распространить на число последовательностей, большее двух.

Рассмотрим последовательность

$$2,\ 1^1/_2,\ 1^1/_3,\ 1^1/_4,\ldots\ldots,1+\frac{1}{n},\ldots\ldots; \tag{28}$$

пределом ее служит 1, так как она представляет сумму последовательностей (2′) и

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots\ldots,1,\ldots\ldots,$$

имеющих пределами соответственно 0 и 1.

Последовательность

$$1+\frac{1}{1},\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ldots\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ldots\ldots, \tag{13'}$$

т.-е.

$$2,\ \ 2^1/_4,\ \ 2^{10}/_{27},\ \ 2^{113}/_{256},\ \ 2^{1026}/_{3125},\ldots\ldots,$$

стремится к числу e, так как она представляет частное последовательностей (13) и (28), имеющих пределами соответственно e и 1. По той же причине последовательность

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\left(1+\frac{1}{3}\right)^2;\left(1+\frac{1}{4}\right)^3,\ldots,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1},\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\ldots \tag{13''}$$

тоже стремится к числу e. Таким образом,

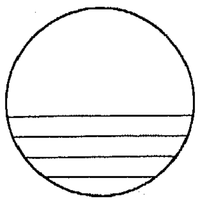
$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \qquad (13'_1)$$

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e. \qquad (13''_1)$$

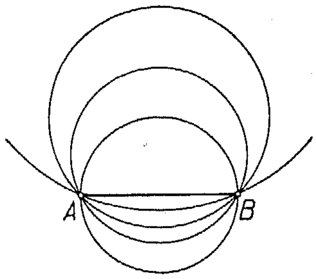
§ 3. Величины постоянные и переменные.

Пусть мы имеем круг данного радиуса и внутри его перемещается хорда (фиг. 2); тогда длина хорды меняется и представляет величину переменную, а радиус круга — величину постоянную.

Рассмотрим теперь прямую AB и станем проводить через точки A и B окружности разных радиусов (фиг. 3); тогда радиус окружности



Фиг. 2.



Фиг. 3.

меняется и представляет собою величину переменную, а хорда AB — величину постоянную.

Таким образом, величина называется постоянной во время какого-либо рассуждения, если она в течение его получает одно и то же числовое значение. Величина называется переменной во время какого-либо рассуждения, если она в течение его получает различные числовые значения.

Совокупность всех значений переменной величины называется областью ее изменения. Так, областью изменения хорды в первом примере служит интервал $(0,\ d)$, где d—длина диаметра; областью изменения радиуса во втором примере — интервал $\left(\frac{1}{2}c,\ \infty\right)$, где c—длина хорды; областью изменения числа сторон многоугольника — совокупность целых чисел в интервале $(3,\ \infty)$.

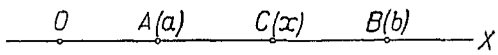
Постоянные величины принято обозначать первыми буквами латинского алфавита $a,\ b,\ c,\ \ldots$, переменные — последними $x,\ y,\ z,\ \ldots$

Пусть переменная величина x получила значения сперва a, а затем x_1; тогда, чтобы узнать, как изменилась переменная x, т.-е. какое получила она приращение, из приращенного значения x_1 вычитают начальное a. Символом приращения служит греческая буква Δ, так что приращение переменной величины обозначается таким образом: Δx. Следовательно, $\Delta x = x_1 - a$. Так как начальное значение переменной величины обозначается обыкновенно той же самой буквой, что и сама переменная, то обычно пишут: $\Delta x = x_1 - x$.

Геометрически переменная величина может быть представлена абсциссой точки, перемещающейся по оси X (см. фиг. 4).

§ 4. Непрерывное и прерывное изменение.

Что такое непрерывное движение, это доступно пониманию каждого. Так, точка C (фиг. 4) перемещается по оси X непрерывно из положения A в положение B, если она принимает последовательно все промежуточные положения между точками A и B; по такому закону, например, движется



Фиг. 4.

свободно падающее тело. При таком перемещении точки C абсцисса ее x непрерывно изменяется от значения a до значения b или, как говорят, непрерывно изменяется в интервале (a, b). Таким образом, переменная величина называется непрерывно изменяющейся в интервале (a, b), если она принимает последовательно все промежуточные значения от a до b или, обратно, от b до a.

Примером прерывного изменения может служить такая переменная величина, которая принимает только целые значения. Точно так же переменная величина прерывна, если ее значения составляют одну из рассмотренных выше последовательностей.

§ 5. Бесконечно малая (умаляющаяся) величина.

Переменная величина называется бесконечно малой или бесконечно умаляющейся, если модуль ее может стать и в дальнейшем процессе изменения пребывает меньше сколь угодно малого наперед заданного положительного числа.

Таким образом, пусть α—бесконечно малая величина и пусть задано какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε; тогда переменная величина α для всех своих значений, начиная с некоторого из них, удовлетворяет неравенству $|\alpha| < \varepsilon$, т.-е. изменяется внутри интервала $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.

Примерами бесконечно малых величин могут служить переменные, которые принимают значения, составляющие последовательности (1), (7′), (7″), (2′) и (2″). Равным образом, длина хорды круга (фиг. 2), все более и более удаляющейся от центра, есть величина бесконечно малая.

§ 6. Бесконечно большая величина.

Переменная величина называется бесконечно возрастающей, если она может стать и в дальнейшем процессе изменения пребывает больше сколь угодно большого наперед заданного положительного числа.

Так, например, переменная величина, значения которой составляют последовательность (6) есть величина бесконечно возрастающая. Точно так же радиус окружности (фиг. 3), которая проходит через данные две точки A и B и центр которой все более и более удаляется от хорды AB, есть величина бесконечно возрастающая.

Переменная величина называется бесконечно убывающей, если она может стать и в дальнейшем процессе изменения пребывает меньше сколь угодно большого по модулю наперед заданного отрицательного числа.

Переменная величина, значения которой представляют последовательность

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots,\ -n,\ \ldots\ldots \tag{6'}$$

может служить примером бесконечно убывающей переменной величины.

Ход изменения бесконечно возрастающей величины наглядно изображается такими фразами: „бесконечно возрастающая величина имеет пределом $+\infty$ (плюс бесконечность)" или „стремится к $+\infty$".

Точно так же говорят: „бесконечно убывающая величина имеет пределом $-\infty$ (минус бесконечность)" или „стремится к $-\infty$".

Бесконечно возрастающую или бесконечно убывающую переменную величину часто называют бесконечно большой величиной.

Точно так же переменная величина, значения которой представляют последовательность

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ \ldots\ldots\ldots,(-1)^{n-1}n,\ \ldots\ldots,$$

может служить примером бесконечно большой величины.

Переменная величина называется конечной или ограниченной, если существует такое положительное число, что модуль ее не может стать больше этого числа. Следовательно, переменная величина x конечна, если для всех ее значений $|x|<M$, где M—некоторое положительное число.

§ 7. Предел переменной.

Постоянное число называется пределом переменного, если модуль их разности может стать и в дальнейшем процессе изменения пребывает меньше сколь угодно малого наперед заданного положительного числа.

Таким образом, если число a служит пределом переменной величины x, то, начиная с некоторого значения ее, $|x-a|<\varepsilon$, где ε—сколь угодно малое положительное число.

Из данного определения предела, а также из определения бесконечно малой величины (§ 5) следует, что разность между переменной величиной x и пределом ее a есть величина бесконечно малая α:

$$x-a=\alpha \text{ или } x=a+\alpha.$$

Мысль, что постоянное число a служит пределом переменного x, выражают также таким образом: „переменное x неограниченно приближается к постоянному a" или „x стремится к a": $x\to a$.

Ту же мысль изображают также записями

$$\text{пред}\, x = a, \quad \lim x = a.$$

Примером переменной величины, имеющей предел, может служить та, значения которой составляют некоторую последовательность, стремящуюся к пределу (§ 1); ясно, что в этом случае оба предела как переменной, так и последовательности совпадают.

Так, переменная величина, значения которой составляют последовательность (2), имеет пределом 1. Переменные величины, которые принимают значения, составляющие одну из последовательностей (1), (7′), (7″), (2′) и (2″), имеют пределом нуль. Последние примеры наводят на мысль, что вообще пределом бесконечно малой величины α служит нуль. В самом деле, по определению бесконечно малой величины (§ 5), начиная с некоторого значения ее, $|\alpha| < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число; неравенство это можно написать таким образом: $|\alpha - 0| < \varepsilon$; отсюда вытекает, что $\lim \alpha = 0$.

Как мы видим, ту же самую мысль можно выразить таким образом:

$$\text{пред}\, \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha \to 0.$$

Пример последовательности

$$1,\ 1,\ 1, \ldots\ldots, 1, \ldots\ldots,$$

имеющей пределом 1, показывает, что под пределом постоянной величины a мы можем разуметь ее самое: $\lim a = a$.

§ 8. Теоремы теории пределов.

Теоремы теории пределов последовательностей (§ 2) можно изложить теперь таким образом (см. теоремы 1, 2 и 3).

Теорема 1. Алгебраическая сумма бесконечно малых есть бесконечно малая.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$—бесконечно малые. Докажем, что алгебраическая сумма их $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$—тоже бесконечно малая, т.-е. что, начиная с некоторого момента, $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k| < \varepsilon$, где ε—сколь угодно малое наперед заданное положительное число. На основании определения бесконечно малой, начиная с некоторого момента, $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_k|$ будут меньше какого-нибудь положительного числа ε_1; положим его равным $\frac{\varepsilon}{k}$;

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{k}, \quad |\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{k}, \ldots, |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Складываем почленно эти неравенства:

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{k};$$

так как

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k|,$$

т.-е. модуль суммы меньше или равен сумме модулей, и

$$\frac{\varepsilon}{k}+\frac{\varepsilon}{k}+\ldots+\frac{\varepsilon}{k}=k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon,$$

то получим

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k|<\varepsilon.$$

Теорема 2. Произведение бесконечно малой на величину не бесконечно большую есть бесконечно малая.

Пусть α—бесконечно малая величина, а x—постоянная или переменная, в частности—бесконечно малая, только не бесконечно большая; следовательно, $|x|<M$, где M—некоторое положительное число. Докажем, что произведение αx тоже бесконечно малая, т.-е. что, начиная с некоторого момента, $|\alpha x|<\varepsilon$, где ε—сколь угодно малое наперед заданное положительное число. На основании определения бесконечно малой величины, начиная с некоторого значения, $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$; с другой стороны, как мы видели, $|x|<M$. Перемножая почленно последние два неравенства, получаем $|\alpha||x|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M$; так как $|\alpha||x|=|\alpha x|$, т.-е. произведение модулей равно модулю произведения, то

$$|\alpha x|<\varepsilon.$$

Теорема 3. Пределы алгебраической суммы, произведения и частного равны соответственно алгебраической сумме, произведению и частному пределов (в последнем случае, если предел делителя не равен нулю).

Пусть x_1 и x_2—переменные величины, a_1 и a_2—соответственно их пределы, так что $lim\, x_1=a_1$ и $lim\, x_2=a_2$, $x_1=a_1+\alpha_1$, $x_2=a_2+\alpha_2$ (§ 7), где α_1 и α_2—величины бесконечно малые. Складываем почленно полученные равенства:

$$x_1+x_2=a_1+a_2+\alpha_1+\alpha_2;$$

так как сумма $\alpha_1+\alpha_2$—величина бесконечно малая (теорема 2), то, согласно определению предела, $lim\,(x_1+x_2)=a_1+a_2$ или

$$lim\ (x_1+x_2)=lim\ x_1+lim\ x_2.$$

Если перемножить равенства $x_1=a_1+\alpha_1$ и $x_2=a_2+\alpha_2$, то получим $x_1x_2=(a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)$ или

$$x_1x_2=a_1a_2+a_1\alpha_2+\alpha_1a_2+\alpha_1\alpha_2.$$

На основании теоремы 2-й произведения $a_1\alpha_2$, α_1a_2, $\alpha_1\alpha_2$—бесконечно малые; на основании теоремы 1-й сумма $a_1\alpha_2+\alpha_1a_2+\alpha_1\alpha_2$—бесконечно малая; следовательно, по определению предела, $lim\, x_1x_2=a_1a_2$ или

$$lim\, x_1x_2=lim\, x_1\cdot lim\, x_2.$$

Разделим почленно равенства $x_1 = a_1 + \alpha_1$ и $x_2 = a_2 + \alpha_2$: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2}$ и вычтем из обеих частей полученного равенства дробь $\frac{a_1}{a_2}$:

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} - \frac{a_1}{a_2} \text{ или } \frac{x_1}{x_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{a_2 + \alpha_2} \cdot \frac{1}{a_2} (\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2).$$

Произведения $\alpha_1 a_2$ и $-a_1\alpha_2$ — бесконечно малые (теор. 2); следовательно, и сумма $\alpha_1 a_2 - a_1\alpha_2$, — бесконечно малая (теор. 1); дроби $\frac{1}{a_2 + \alpha_2}$ и $\frac{1}{a_2}$ конечны, если $a_2 \neq 0$; следовательно, произведение

$$\frac{1}{a_2 + \alpha_2} \cdot \frac{1}{a_2} (\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2)$$

бесконечно малая (теорема 2). Таким образом, $lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$ или

$$lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{lim\ x_1}{lim\ x_2}.$$

Теоремы эти можно распространить на случай многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$. Например,

$$\begin{aligned} &lim\ (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k) = \\ &= lim\ x_1 + lim\ (x_2 + x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k) = \\ &= lim\ x_1 + lim\ x_2 + lim\ (x_3 + \ldots + x_{k-1} + x_k) = \\ &= lim\ x_1 + lim\ x_2 + lim\ x_3 + \ldots + lim\ (x_{k-1} + x_k) = \\ &= lim\ x_1 + lim\ x_2 + lim\ x_3 + \ldots + lim\ x_{k-1} + lim\ x_k. \end{aligned}$$

Точно таким же образом

$$\begin{aligned} &lim\ (x_1 x_2 \ldots x_k) = lim\ x_1 \cdot lim\ (x_2 x_3 \ldots x_k) = \\ &= lim\ x_1 \cdot lim\ x_2 \cdot lim\ (x_3 \ldots x_k) = \\ &= lim\ x_1 \cdot lim\ x_2 \cdot lim\ x_3 \ldots lim\ (x_{k-1} \cdot x_k) = \\ &= lim\ x_1 \cdot lim\ x_2 \ldots lim\ x_k. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Постоянный множитель можно выносить за знак предела. В самом деле, по теореме 3, $lim\ cu = lim\ c\ lim\ u$, но $lim\ c = c$, т. е. предел постоянного равен ему самому (§ 7), и, следовательно,

$$lim\ cu = c\ lim\ u.$$

Теорема 4. Если предел переменной не равен нулю, то с некоторого значения переменная получает тот же знак, что и предел.

Пусть предел переменной x равен a и пусть ε такое положительное число, что $\varepsilon < |a|$; тогда в интервале $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ нуля не может быть (фиг. 1) и, следовательно, все числа, расположенные внутри этого интервала, имеют тот же знак, что и предел a. По определению предела (§ 7), для числа ε можно указать такое значение переменной x, начиная с которого $|x-a|<\varepsilon$; следовательно, начиная с этого значения, переменная x получает тот же знак, что и предел a.

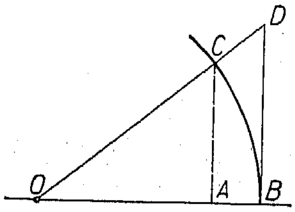
СЛЕДСТВИЕ. Предел положительной, т.-е. принимающей с некоторого значения только положительные значения, переменной величины не может быть отрицательным числом. Предел отрицательной переменной величины не может быть положительным числом.

Теорема 5. Если значения переменной величины заключены между соответственными значениями двух других переменных величин, имеющих общий предел, то этот последний служит пределом и заключенной переменной величины.

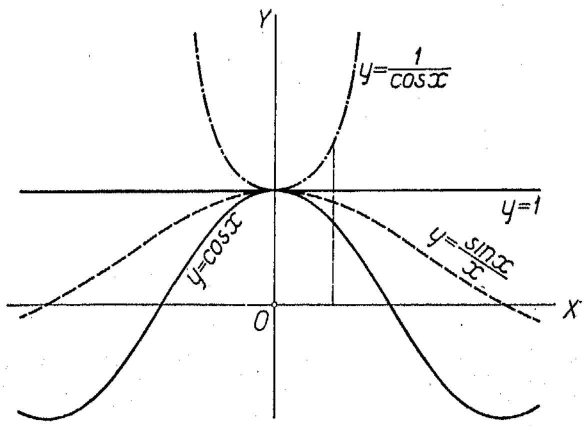
Пусть соответственные значения переменных x, y, z удовлетворяют неравенствам $x>y>z$, причем $lim\, x = lim\, z = a$; отсюда $x-y>0$ и $y-z>0$; следовательно (следствие теоремы 4), $lim\,(x-y)\geqslant 0$ и $lim\,(y-z)\geqslant 0$; по теореме о пределе алгебраической суммы (теорема 3) $lim\, x - lim\, y \geqslant 0$ или $a \geqslant lim\, y$ и $lim\, y - lim\, z \geqslant 0$ или $lim\, y \geqslant a$, откуда

$$lim\, y = a.$$

ПРИМЕР 1. Доказать, что $lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Пусть дуга x, т.-е. BC (фиг. 5), удовлетворяет неравенствам $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Сравнивая площади треугольника OCA, сектора OCB и треугольника OBD, получаем $\frac{1}{2}\sin x\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, откуда $\cos x<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ или $\dfrac{1}{\cos x}>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$ (сравн. фиг. 6).

Из тригонометрии известно, что, если дуга x стремится к 0, то $\cos x$ стремится к 1. Следовательно, и по теореме 3-й $lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$, откуда по теореме 5-й

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если дуга x подходит к нулю, удовлетворяя неравенствам $-\frac{\pi}{2}<x<0$, т.-е., если $x\to -0$, то полагая $x=-y$, получим $-\frac{\pi}{2}<-y<0$ или $\frac{\pi}{2}>y>0$ и

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to +0}\frac{\sin(-y)}{-y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

Таким образом, например, последовательность

$$\frac{\sin(0{,}5\pi)}{0{,}5\pi},\ \frac{\sin(0{,}05\pi)}{0{,}05\pi},\ \frac{\sin(0{,}005\pi)}{0{,}005\pi},\ \frac{\sin(0{,}0005\pi)}{0{,}0005\pi},$$
$$\frac{\sin(0{,}00005\pi)}{0{,}00005\pi},\ \frac{\sin(0{,}000005\pi)}{0{,}000005\pi},\ \ldots\ldots,$$

т.-е.

$$0{,}636\,619\,7\ldots;\ 0{,}995\,892\,6\ldots;\ 0{,}999\,958\,7\ldots;$$
$$0{,}999\,999\,3\ldots;\ 0{,}999\,999\,5\ldots;\ 0{,}999\,999\,9\ldots;\ \ldots\ldots,$$

имеет пределом 1.

ПРИМЕР 2. Доказать, что $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, когда x пробегает не только целые (§ 2), но дробные и иррациональные значения (фиг. 7) *).

Пусть число x лежит между двумя последовательными целыми числами n и $n+1$, т.-е.

$$n<x<n+1. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n} \text{ и } 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}. \tag{2}$$

Возведем меньшее число $1+\frac{1}{n+1}$, среднее $1+\frac{1}{x}$ и большее $1+\frac{1}{n}$ в степени, показателями которых служат соответственно меньшее число n, среднее x и большее $n+1$ (см. 1); тогда смысл неравенств (2) не изменится:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e$$

(см. форм. $13_1''$, § 2) и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

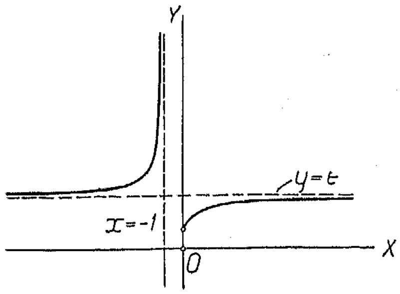
*) На фиг. 7 изображена кривая $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

(см. форм. 13_I, § 2), то по теореме 5

$$lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

при условии, что x пробегает какие угодно положительные значения.

ПРИМЕР 3. Доказать, что $lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, когда x стремится к бесконечности, пробегая отрицательные значения (см. фиг. 7).



Фиг. 7.

Полагаем $x=-y-1$; тогда, если $x\to-\infty$, то $y\to+\infty$ и, следовательно,

$$lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=$$

$$=lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1};$$

но

$$\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-y-1}=\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y-1}=\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1},$$

так что

$$lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}=e.$$

ПРИМЕР 4. Доказать, что $lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$, где $\ln a$ обозначает собою натуральный (т.-е. при основании e) логарифм числа a.

Положим $a^h-1=\frac{1}{x}$; из элементарной алгебры известно, что если h стремится к нулю, то a^h стремится к единице и, следовательно, разность a^h-1 и равная ей дробь $\frac{1}{x}$ к нулю, а знаменатель x к бесконечности Так как $a^h=1+\frac{1}{x}$ и, следовательно, $h=\lg_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$, то

$$lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\lg_a\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lg_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\lg_a\left[lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}=\frac{1}{\lg_a e}.$$

По определению логарифма $e=a^{\lg_a e}$ и, следовательно, $\ln e=\lg_a e\cdot\ln a$; так как $\ln e=1$, т.-е. логарифм основания равен 1, то

$$\frac{1}{\lg_a e}=\ln a \quad \text{и} \quad lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a.$$

§ 9. Независимое переменное, аргумент и функция.

Переменная величина называется во время какого-либо рассуждения независимой переменной, если ей в течение его задают числовые значения.

Если переменная величина во время какого-либо рассуждения получает числовые значения соответственно значениям другой переменной величины, то эта последняя называется в течение его аргументом, а первая переменная величина—зависимой переменной или функцией.

Аргумент может быть как независимым переменным (в том случае, если ему задают числовые значения), так и функцией (в том случае, если он получает числовые значения в соответствии с числовыми значениями третьей переменной величины); в последнем случае первая переменная называется функцией от функции или сложной функцией.

Чтобы выразить, что переменные величины y и x представляют из себя соответственно функцию (functio) и аргумент, пишут

$y=f(x)$, $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $y=M(x)$ и т. п.

Так, например, переменные величины пройденный путь y и соответствующий промежуток времени x в случае падения тела без начальной скорости связаны таким уравнением:

$$y=\frac{1}{2}gx^2,$$

где ускорение $g=981\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$—величина постоянная.

В данном примере $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$; если мы желаем вычислить пройденный путь втечение, например, первых двух секунд, то полагаем в полученном уравнении $x=2$:

$$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 981\cdot 2^2=1962 \text{ см.}$$

Изменяя давление на газ, мы вместе с тем изменяем и его объем; тогда давление представляет собою аргумент и вместе с тем независимое переменное, а объем — функцию. С другой стороны, функция $z=\operatorname{tg} t$ представляет сложную функцию от x, если положим, например, что $t=a^x$; таким образом, t представляет аргумент функции z и, вместе с тем, функцию независимого переменного x.

Изменяя давление x на газ, мы изменяли его объем y, так что $y=f(x)$; но можно и обратно—изменять объем y газа, тогда изменяется его давление x; в последнем случае, следовательно, $x=F(y)$. Такие две функции $y=f(x)$ и $x=F(y)$ называются одна прямой, а другая обратной. Так, например, если

$$y=a^x,\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x$$

прямые функции, то

$$x=\lg_a y,\ x=\arcsin y,\ x=\arccos y,\ x=\operatorname{arc\,tg} y,\ x=\operatorname{arc\,ctg} y$$

соответственно обратные функции. Таким образом, если дана функция от некоторого аргумента, то обратно—этот последний можно рассматривать, как функцию от данной функции, причем он называется обратной функцией относительно данной прямой функции.

Изменяя одновременно давление x и температуру y газа, мы будем менять и объем его z. Таким образом получаем понятие о функции двух переменных $z=f\ (x, y)$ и, вообще, о функции многих переменных

$$z=f\ (x,\ y,\ u,\ v,\ t,\ .\ .\ .).$$

Если уравнение, связующее аргумент и функцию, решено относительно последней, то она называется явной функцией, в противном случае неявной. Так, например, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ и, вообще, $y=f\ (x)$ явная функция аргумента x; в уравнении же $x^2+y^2=a^2$ и, вообще, $F\ (x, y)=0$ y неявная функция аргумента x.

Функция называется однозначной, если каждому значению аргумента соответствует единственное значение ее; в противном случае она называется многозначной.

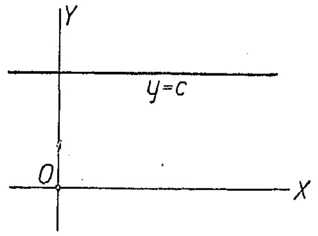
Примерами однозначных функций могут служить x^2 и, вообще, x^n (где n—целое число), a^x, $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; примерами многозначных функций $x^{1/2}$ и, вообще, x^n (где n—нецелое число), $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$.

Мы будем в дальнейшем рассматривать только однозначные функции. Чтобы не исключать из рассмотрения многозначных функций, мы будем под символом каждой из них разуметь одно какое-нибудь значение ее или, как говорят, одну ветвь ее, например, под символом $x^{1/2}$ и, вообще, x^n, где n—нецелое число, мы будем подразумевать арифметическое значение корня, под символами $\arcsin x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ их ветви в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, под символами $\arccos x$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ их ветви в интервале $(0,\pi)$.

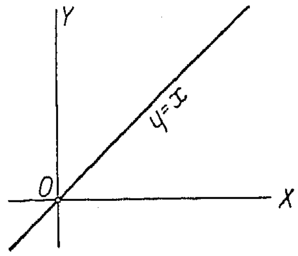
§ 10. Геометрическое представление функции.

Возьмем некоторую функцию y от аргумента x, т.-е. $y=f(x)$, и пусть значению x аргумента соответствует некоторое значение y функции. В аналитической геометрии устанавливается взаимно однозначное соответствие между парой чисел x и y и точкой на плоскости, а также между уравнением $y=f(x)$ или $F(x,y)=0$ и геометрическим местом точек на плоскости. Таким образом графически функция одного переменного изображается в виде геометрического места точек, соответствующих тем парам значений аргумента x и функции y, которые получаются из определения функции.

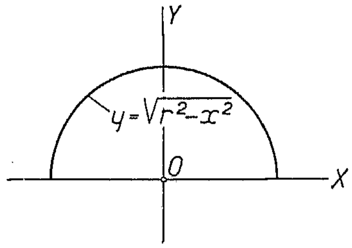
Так, графиками функций $y=c$, где c—постоянное, $y=x$, где x—аргумент, $y=\sqrt{r^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ служат соответственно: прямая, параллельная оси x и отстоящая от нее на расстоянии c (фиг. 8), равно-



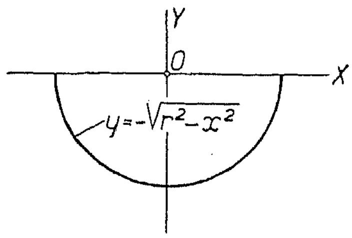
Фиг. 8.



Фиг. 8'.



Фиг. 9.



Фиг. 9'.

делящая нормального координатного угла (фиг. 8'), верхняя (фиг. 9) и нижняя (фиг. 9') полуокружности круга радиуса r с центром в начале координат.

§ 11. Непрерывная функция.

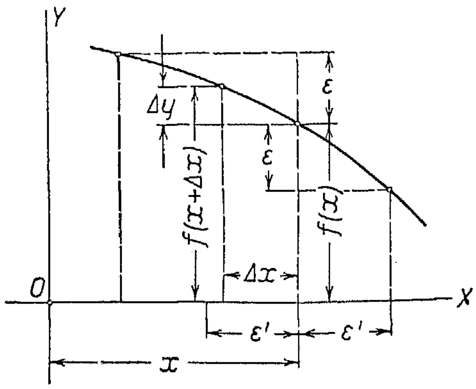
Что такое непрерывная, или сплошная, линия, это доступно пониманию каждого. Действительно, каждый может получить представление о непрерывной кривой, если проведет, например, карандашом по бумаге, не отнимая от бумаги карандаша.

В соответствии с этим, мы дадим определение непрерывной функции. Функция называется непрерывной при данном значении аргумента, если при бесконечно малом приращении этого значения аргумента она сама получает бесконечно малое приращение, другими словами, если $y=f(x)$ есть непрерывная функция для данного значения x аргумента, то для всякого положительного числа ε всегда можно подыскать такое число ε', что, при $|\Delta x|<\varepsilon'$, $|\Delta y|<\varepsilon$, где Δx и $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ обозначают приращения соответственных значений аргумента x и функции y (фиг. 10).

Следовательно, если функция $y=f(x)$ непрерывна, то, при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Обозначим через a то частное значение аргумента x, при котором функция $y=f(x)$ непрерывна; тогда, обозначая через h приращение аргумента x и предполагая, что оно стремится к нулю, получим согласно определению непрерывной функции, что приращение функции $f(a+h)-f(a)$

тоже величина бесконечно малая. Следовательно, на основании определения предела (§ 7) $\lim_{h \to a} f(a+h) = f(a)$ или, полагая $x = a + h$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to a} f(x)$ называется предельным значением функции, а $f(a)$—частным значением ее. Следовательно, предельным значением функции для данного значения аргумента называется предел, к которому стремится функция, когда аргумент стремится к данному значению. Частным значением функции называется то значение ее, которое получается из соответствующего значения аргумента на основании определения ее.



Фиг. 10.

Таким образом, равенство $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ можно формулировать в виде теоремы 1: предельное значение непрерывной функции равно соответствующему частному значению ее.

Отсюда (на основании теоремы 4 § 8) получаем теорему 2: если аргумент стремится к данному своему значению, то, начиная с некоторого момента, непрерывная функция его принимает тот же знак, что и соответствующее ее частное значение (если оно не равно нулю).

Принимая во внимание, что $a = \lim x$, можем равенство $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ представить в таком виде: $\lim f(x) = f(\lim x)$, т.-е. символ предела и символ непрерывной функции можно переставлять друг с другом (теорема 3).

В виду этого (по 3-й теореме теории пределов, § 8) алгебраическая сумма, произведение и частное суть непрерывные функции соответственно слагаемых, сомножителей, делимого и делителя (если последний не обращается в нуль). Следовательно, сумма, разность, произведение и частное непрерывных функций непрерывны (за исключением тех значений аргумента, при которых делитель обращается в нуль).

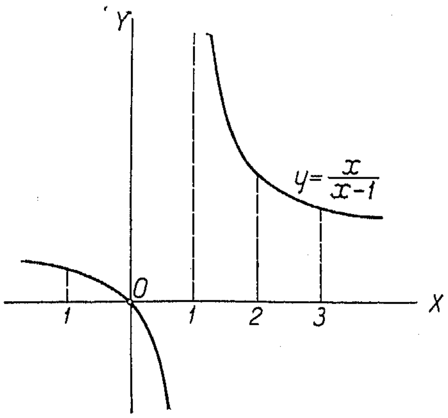
Рассмотрим теперь функцию непрерывную в некотором интервале (a,b).

Функция называется непрерывной в данном интервале, если она непрерывна для каждого значения аргумента внутри этого интервала.

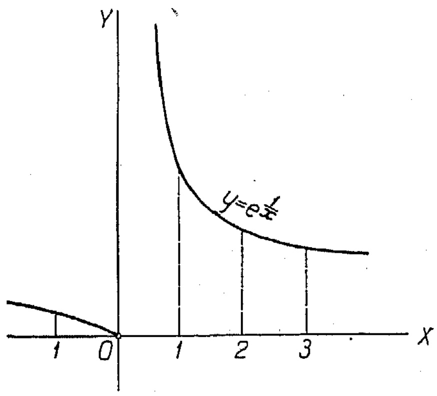
Если функция непрерывна в данном интервале, за исключением отдельных значений аргумента, то эти последние называются **точками ее разрыва**.

Так, например, функция $y=\frac{x}{x-1}$ (фиг. 11) прерывна для $x=1$: она неограниченно растет, когда x стремится к 1. Функция $y=e^{\frac{1}{x}}$ (фиг. 12) имеет точкой разрыва 0: при $x\to+0$ y неограниченно растет, а при $x\to-0$ стремится к нулю.

В заключение приведем без доказательства теорему 4: **функция, непрерывная в некотором интервале, получает внутри его наибольшее и наименьшее значения, а также и промежуточные между наибольшим и наименьшим значениями** (см. фиг. 39, 40, 41, 42, 43, 58).



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Что теорема эта может быть не верна для функций, имеющих точки разрыва, это видно из только что рассмотренных примеров: функция $y=\frac{x}{x-1}$ внутри интервала $(-1, 2)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений (фиг. 11); функция $y=e^{\frac{1}{x}}$ внутри того же интервала не имеет наибольшего значения (фиг. 12). Наоборот, в интервале, например, (2, 3), каждая из этих функций получает и наибольшее и наименьшее значения, а также и все промежуточные (фиг. 11 и 12).

§ 12. Алгебраические и трансцендентные функции.

Функция, зависимость которой от аргумента может быть представлена в виде равенства нулю некоторого многочлена относительно ее и аргумента, называется алгебраической.

Например, если зависимость функции y от аргумента x может быть представлена равенством

$$y^3 - y - x = 0,$$

то y называется алгебраической функцией аргумента x. Точно так же уравнение:

$$y^4 + 4\,xy^3 + y^2(-4x^3 + 4x^2 - 2x - 2) + y(4x^2 - 4x) + (x^2 - 2x + 1) = 0$$

определяет алгебраическую функцию y аргумента x.

Эти примеры показывают, что многочлен, определяющий алгебраическую функцию y, может быть представлен в таком виде:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-2}(x)y^2 + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

где коэффициенты

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_{n-2}(x),\ P_{n-1}(x),\ P_n(x)$$

многочлены, расположенные по степеням аргумента.

Если алгебраическая функция может быть выражена явно через аргумент при помощи радикалов, то она называется иррациональной. Отсюда следует, что значение иррациональной функции получается из соответствующего значения аргумента при помощи шести алгебраических действий. Например, алгебраическая функция y, определяемая уравнением

$$y^4 + 4xy^3 + y^2(-4x^3 + 4x^2 - 2x - 2) + y(4x^2 - 4x) + (x^2 - 2x + 1) = 0,$$

иррациональная, так как она может быть явно выражена через аргумент x таким образом:

$$y = \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{1 + x^2}}.$$

Если уравнение, определяющее алгебраическую функцию, первой степени относительно ее, то эта функция называется рациональной.

Таким образом, рациональная функция определяется уравнением

$$P_0(x)\,y = P(x), \quad \text{откуда} \quad y = \frac{P(x)}{P_0(x)},$$

т. е. рациональная функция может быть представлена в виде частного двух многочленов, расположенных по степеням аргумента; следовательно, значение рациональной функции получается из соответствующего значения аргумента помощью четырех арифметических действий и возведения в целую степень. Например, алгебраическая функция, определяемая уравнением первой степени относительно ее $(2 - x\sqrt[3]{3})\,y + (5x^2 + \sqrt{2}) = 0$, функция рациональная; она может быть представлена в виде частного двух многочленов: $y = \dfrac{5x^2 + \sqrt{2}}{x\sqrt[3]{3} - 2}$. Отсюда следует (§ 11), что рациональная функция непрерывна для всех значений аргумента, кроме тех значений его, которые обращают в нуль многочлен, служащий знаменателем.

Если знаменатель в выражении рациональной функции не содержит аргумента, то эта последняя называется целой рациональной.

Делим в выражении $y=\frac{P(x)}{P_0(x)}$ все коэффициенты многочлена $P(x)$ на постоянное $P_0(x)$ и пусть результат деления будет многочлен $Q(x)$: $y=Q(x)$, т.-е. целая рациональная функция может быть представлена в виде многочлена, расположенного по степеням аргумента и, следовательно, значение целой рациональной функции получается из соответствующего значения аргумента при помощи четырех арифметических действий и возвышения в целую положительную степень. Например,

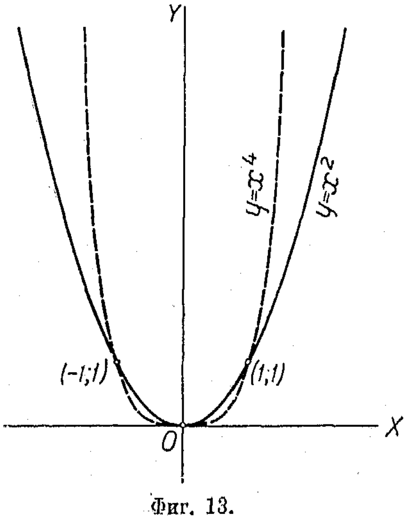
$$y=\frac{x^2+x\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\sqrt{5}$$

функция целая рациональная. Отсюда следует (§ 11), что целая рациональная функция непрерывна для всех значений аргумента.

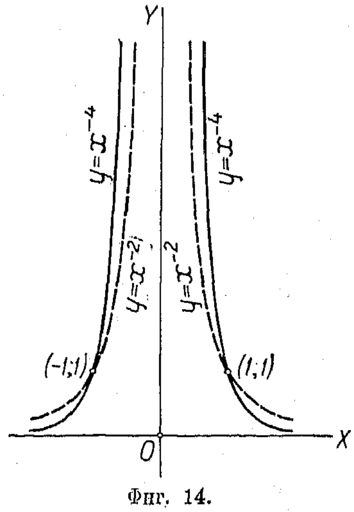
Всякая не алгебраическая функция называется трансцендентной. Например, $y=x^a$ (где a — число иррациональное), $y=a^x$, $y=\ln x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ — трансцендентные функции.

§ 13. Элементарные функции.

Функция степенная x^a, показательная a^x, логарифмическая $\lg x$ (мы будем рассматривать $\lg|x|$), тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,



Фиг. 13.



Фиг. 14.

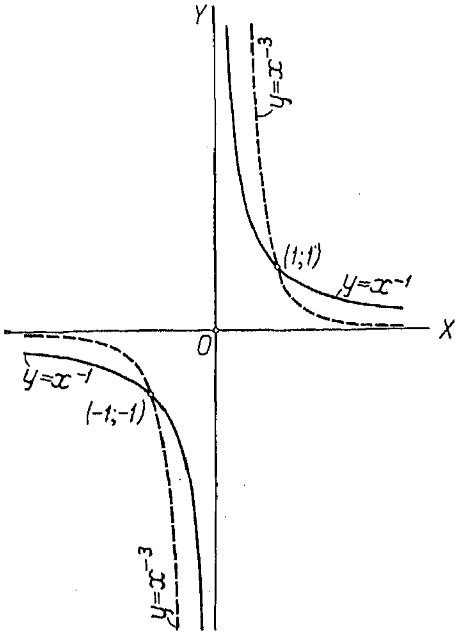
$\operatorname{ctg} x$ и круговые $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ называются основными элементарными функциями.

Функция, представляющая комбинацию основных элементарных функций, называется элементарной. Например, $y=e^{\sin x}+5\lg|\operatorname{arctg} x|$ функция элементарная.

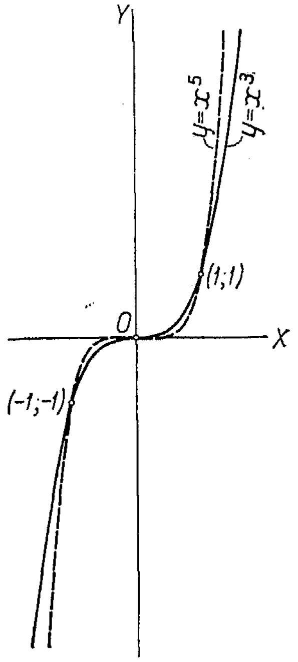
Рассмотрим более подробно основные элементарные функции.

I. Степенная функция $y = x^a$.

Если a — число целое, то x может получать все значения от $-\infty$



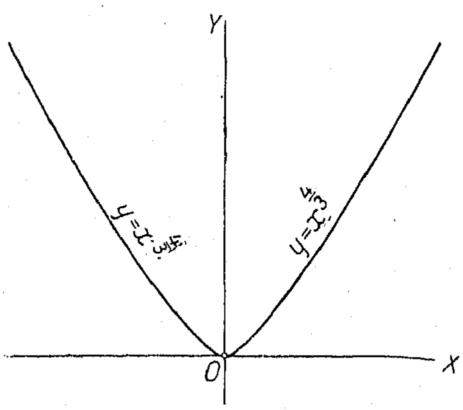
Фиг. 15.



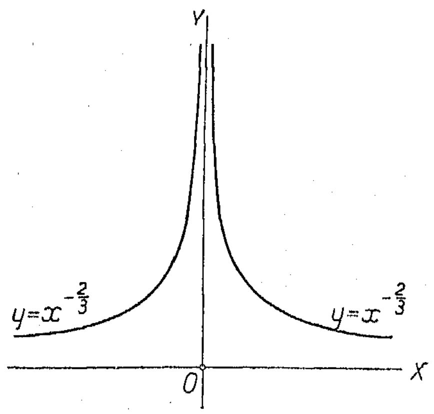
Фиг. 16.

до $+\infty$, т.-е. областью существования функции x^a служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

Если $a > 0$, то графиками функции служат параболы (фиг. 13 и 16); если $a < 0$ — гиперболы (фиг. 14 и 15).



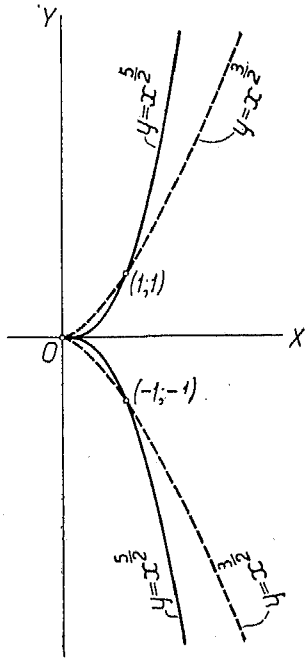
Фиг. 17.



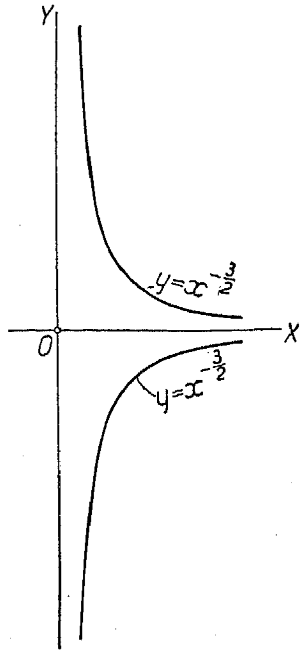
Фиг. 18.

Тот же самый интервал $(-\infty, \infty)$ служит областью существования функции $y = x^a$, если показатель a — дробь, знаменателем который служит нечетное число (фиг. 17 и 18).

Во всех остальных случаях область существования функции x^a представляет интервал $(0, \infty)$ (фиг. 19 и 20). Из этого свойства степенной функции x^a следует, что у показательной функции $y = a^x$ число a должно быть положительным, если аргумент x принимает какие угодно значения.



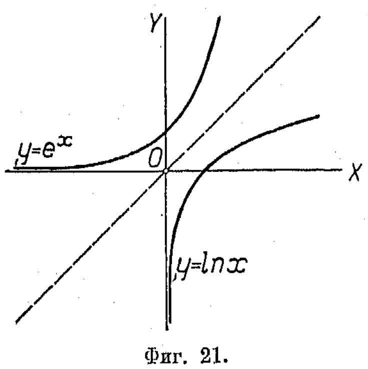
Фиг. 19.



Фиг. 20.

II. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$. Как известно из алгебры, областью существования показательной функции $y = a^x$ служит интервал $(-\infty, +\infty)$ (фиг. 21).

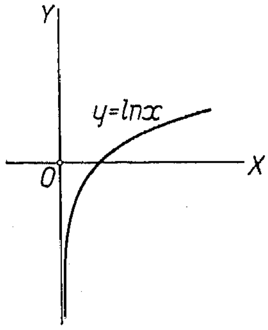
III. Логарифмическая функция $y = \lg x$.



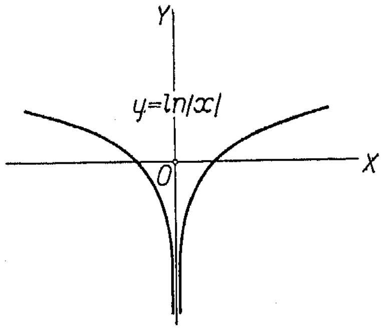
Фиг. 21.

Как известно из алгебры, областью существования логарифма $y = \lg x$ служит интервал $(0, +\infty)$ (фиг. 22). Так как равенство $y = \lg x$ или, что то же, $x = a^y$ отличается от $y = a^x$ только перестановкой букв x и y, то графика функции $y = \lg x$ (фиг. 22) получается из графики функции $y=a^x$ (фиг. 21) путем вращения чертежа около биссектрисы нормального координатного угла. Вообще, тем же путем получается графика любой функции из графики соответствующей прямой функции.

В дальнейшем мы будем рассматривать функцию $y=\lg|x|$ (фиг. 23);



Фиг. 22.



Фиг. 23.

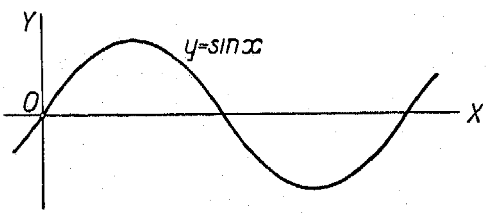
областью ее существования служит интервал $(-\infty, +\infty)$ с точкой разрыва 0.

IV. Тригонометрическая функция $y=\sin x$. Как известно из тригонометрии, функция $y=\sin x$ имеет областью существования интервал $(-\infty, +\infty)$ (фиг. 24).

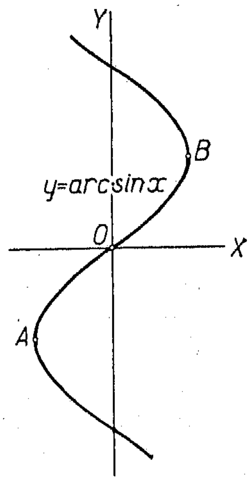
V. Круговая функция $y=\arcsin x$. Так как синус изменяется в интервале $(-1, +1)$, то областью существования обратной функции $y=\arcsin x$ служит интервал $(-1, +1)$ (фиг. 25). Главную ветвь функции изображает дуга кривой, между точками

$$A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ и } B\left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

VI. Тригонометрическая функция $y=\cos x$.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

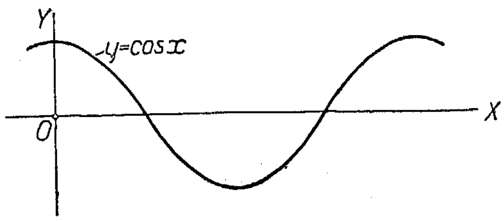
Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, то областью существования этой функции служит интервал $(-\infty, +\infty)$, а графикой—синусоида (фиг. 24), передвинутая в сторону отрицательного направления оси X на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (фиг. 26).

VII. Круговая функция $y = \arccos x$.

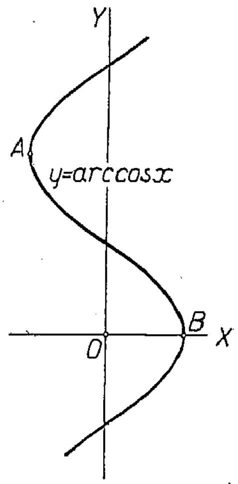
Так как косинус изменяется в интервале $(-1, +1)$, то областью существования обратной функции $y = \arccos x$ служит интервал $(-1, +1)$ (фиг. 27). Главную ветвь функции изображает дуга AB, концами которой служат соответственно точки $A(-1, \pi)$ и $B(+1, 0)$.

VIII. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{tg} x$.

Как известно из тригонометрии, областью существования тангенса служит интервал $(-\infty, +\infty)$ с точками разрыва $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где n — целое число (фиг. 28).



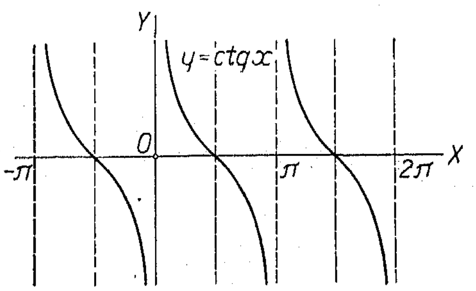
Фиг. 26.



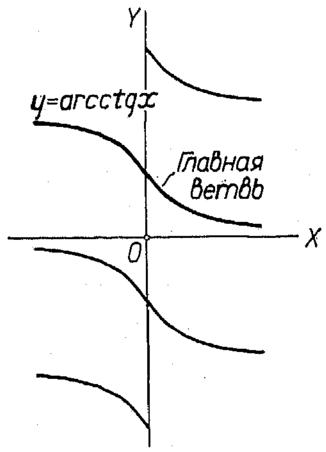
Фиг. 27.

IX. Круговая функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Так как тангенс изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, то областью существования $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (фиг. 29) служит интервал $(-\infty, +\infty)$.



Фиг. 28.

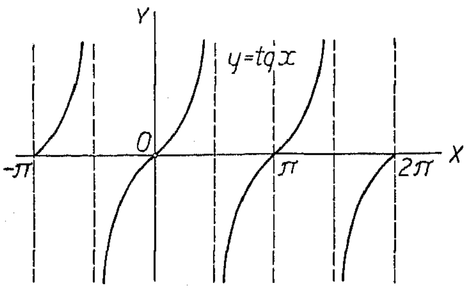


Фиг. 29.

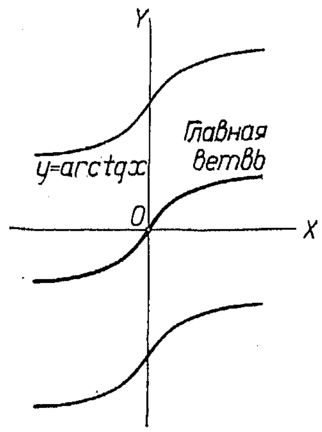
X. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{ctg} x$.

Так как $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, то областью существования этой функции служит тоже интервал $(-\infty, +\infty)$ с точками разрыва $n\pi$, где n

целое число, а графикой — тангенсоида, сдвинутая в сторону отрицательного направления оси X на расстояние $\frac{\pi}{2}$ и перевернутая около оси абсцисс на 180° (фиг. 28′).



Фиг. 28′.



Фиг. 29′.

XI. Круговая функция $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

Так как котангенс изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, то областью существования обратной функции $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ (фиг. 29′) служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.
Дифференциальное исчисление.

ГЛАВА I.
Первоначальные понятия.

§ 1. Производная; геометрический смысл ее.

Пусть дан какой-либо закон, связующий две переменные величины— аргумент x и функцию y, так что $y=f(x)$; в этом случае представляется крайне важным установить, каким образом изменяется функция y в зависимости от изменения аргумента x, т.-е. растет ли она с ростом аргумента или убывает, переходит ли она от возрастания к убыванию, т.-е. имеет ли максимум, или от убывания к возрастанию, т.-е. имеет ли минимум, и т. д. Все это исследование очень упрощается, если из данной функции $y=f(x)$, которая называется **начальной** *), можно получить или произвести новую функцию, которая называется **производной**.

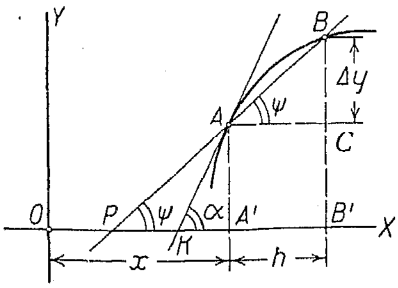
Нахождение приемов получения из начальной функции производной, а также установление связи между свойствами этих функций и составляет задачу **дифференциального исчисления**. **Продифференцировать** функцию—это значит найти ее производную. Оказывается, что для существования производной необходимым условием является непрерывность начальной функции; поэтому в дифференциальном исчислении мы будем рассматривать только непрерывные функции или непрерывные функции почти всюду, т.-е. такие, которые везде в данном интервале непрерывны, за исключением отдельных точек внутри его. Для существования производной, как оказывается, непрерывность начальной функции есть условие недостаточное; поэтому в дифференциальном исчислении рассматриваются только такие непрерывные функции, которые имеют производные по крайней мере почти всюду, т.-е. за исключением отдельных точек внутри данного интервала. Такие функции называются **дифференцируемыми**. Кроме того, как было указано

*) В некоторых курсах начальная функция называется первоначальной, или первообразной, или примитивной.

во введении в анализ (§ 9), изучаемые функции должны быть однозначными.

Таким образом, если в дальнейшем дается функция $y=f(x)$, то она однозначна, непрерывна и имеет производную.

Возьмем графику этой функции $y=f(x)$ (фиг. 30) и будем изучать течение ее (т.-е. ее изменение в зависимости от изменения аргумента) для данной точки x.(т.-е. для данного значения x аргумента) *).



Фиг. 30.

С этой целью дадим аргументу приращение $\Delta x = h$; тогда и функция получит соответствующее приращение Δy, так что

$$\Delta y = f(x+h) - f(x).$$

Ясно, что это приращение Δy уже несколько характеризует изменение функции $y=f(x)$: если $\Delta y > 0$, функция возрастает, если $\Delta y < 0$, убывает; далее, величина приращения Δy характеризует быстроту изменения (возрастания или убывания) функции: модуль приращения, т.-е. $|\Delta y|$, тем больше, чем больше скорость изменения функции в интервале $(x, \ x+h)$; отнесем эту величину Δy к единице изменения независимого переменного, т.-е. составим дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Выясним теперь геометрический смысл всех совершенных операций; пусть координатами точки A служат соответственно числа x и $y=f(x)$, а точки B $x+\Delta x$ и $y+\Delta y = f(x+h)$; тогда приращение независимого переменного $h=\Delta x$ и приращение функции Δy изобразятся соответственно отрезками $A'B' = AC$ и CB, а отношение их $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.-е. отношение $\frac{CB}{AC}$ катетов прямоугольного треугольника ABC, представится тангенсом угла $CAB=\psi$, образуемого секущей AB с осью X, иначе, угловым коэффициентом секущей AB. Очевидно, чем ближе к нулю число $h=\Delta x$, тем более точно отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ характеризует изменение функции $y=f(x)$ в точке x, и, в конце концов, когда Δx обратится в ноль, предел отношения, т.-е. $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, вполне точно охарактеризует изменение функции $y=f(x)$ в точке x. Этот предел, если он существует, и называется **производной первого порядка** или просто **производной** начальной функции $y=f(x)$ в точке x. Каждому значению x независимого переменного соответствует свое значение предела $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.-е. **производная**, как и начальная, **есть**

---

*) Таким образом одна и та же буква x обозначает переменную величину (в данном случае аргумент) и ее частное значение; с этим способом обозначения придется постоянно встречаться и поэтому с самого начала нужно обратить на это обстоятельство самое серьезное внимание.

функция независимого переменного x. Таким образом, если отношение приращения функции к соответствующему приращению независимого переменного для данного значения его стремится к пределу, когда приращение независимого переменного неограниченно приближается к нулю, то этот предел называется производной (первого порядка) функции для данного значения независимого переменного.

Выясним теперь геометрический смысл совершенного нами процесса перехода к пределу и для этого прежде всего дадим определение касательной к кривой: если секущая в данной точке кривой стремится к предельной прямой, когда вторая точка пересечения неограниченно приближается к данной точке, то эта предельная прямая называется касательной в данной точке кривой. Легко видеть, что, когда приращение Δx неограниченно стремится к нулю, точка B (фиг. 30) неограниченно приближается к точке A, и в пределе секущая PA переходит в касательную KA, угол φ секущей с осью X — в угол α касательной с той же осью и угловой коэффициент секущей — в угловой коэффициент касательной.

Таким образом производную функции для данного значения независимого переменнго геометрически представляет угловой коэффициент касательной в соответствующей точке кривой, служащей графикой этой функции.

§ 2. Обозначения производной.

Мы видели (§ 1), что, если дана функция $y=f(x)$, то ее производная представляет $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или, что то же,

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Такой способ обозначения производной слишком сложен, и в настоящее время пользуются следующими более простыми приемами записи:

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$ или $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ (обозначение Лейбница);

y_x', y' или $f'(x)$ (обозначение Лагранжа);

$D_x y$ или $Df(x)$ (обозначение Коши).

Таким образом

$$\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

$$y' = y_x' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad f'(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
$$D_x y = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad Df(x) = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Наиболее употребительны первые два способа обозначения, причем символ Лейбница пока (см. гл. VI, § 6) нужно понимать слитно, как указывают на это обозначения $\frac{d}{dx} y$, $\frac{d}{dx} f(x)$.

Пусть касательная в точке (x, y) кривой $y = f(x)$ образует с осью X угол α (фиг. 30); тогда, пользуясь введенными символами, можем написать

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y_x' = f'(x)$$

или

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{arctg}(y_x') = \operatorname{arctg}[f'(x)] \qquad \text{(см. § 1).}$$

§ 3. Механический смысл производной.

Особенно простое значение получает производная, если под начальной функцией $y = f(x)$ разуметь расстояние, проходимое движущейся точкой, а под независимым переменным x соответствующий промежуток времени. Если движение равномерное, то для нахождения скорости следует расстояние Δy, пройденное в течение промежутка времени Δx, разделить на Δx, т.-е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если же движение не равномерное, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет так называемую „среднюю" скорость, которая тем ближе к „истинной" скорости в момент x, чем меньше промежуток времени $\Delta x = h$; следовательно,

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

даст „истинную" скорость в момент x. Таким образом, производную функции для данного значения аргумента механически представляет скорость для соответствующего момента времени, причем время служит независимым переменным, а расстояние функцией. Короче ту же мысль выражают так: производная пространства по времени равняется скорости.

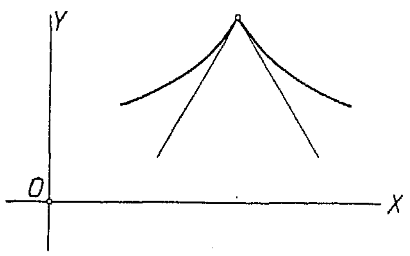
Если под функцией $y = f(x)$ разуметь скорость, а под независимым переменным x — время, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представит среднее ускорение, а $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ — ускорение в данный момент x.

Благодаря своему значению в механике, понятие о производной находит себе применение в физике, химии и других науках. Пусть, например, какая-нибудь физическая величина y изменяется в зависимости от температуры x, т.-е. $y = f(x)$; тогда производная $f'(x)$ представляет температурный коэффициент этой величины, т.-е. скорость ее изменения с изменением температуры. Так, если y есть длина прута, то производная $f'(x)$ является мерой скорости его расширения; если y есть количество тепла тела, то $f'(x)$ — удельная теплота его. Пусть y—количество вещества, подвергшегося за время x изменению в какой-нибудь химической реакции, так что $y=f(x)$; тогда $f'(x)$ представляет скорость химической реакции.

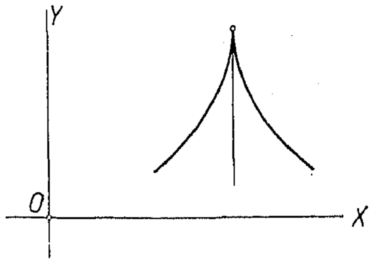
§ 4. Основные теоремы и формулы дифференцирования.

Докажем теперь ряд основных теорем и формул, которые дадут нам возможность при знании производных одиннадцати основных элементарных функций (см. § 5) найти производную любой функции.

Пусть в некотором интервале дана функция $y=f(x)$ и пусть она имеет в этом интервале производную; будем в дальнейшем под этими словами разуметь, что она имеет единственную и конечную



Фиг. 31.



Фиг. 32.

производную для каждой точки внутри этого интервала. Таким образом, функции, графики которых изображены на фиг. 31 и 32, в дальнейшем в общих случаях рассмотрению не подлежат, а в каждом отдельном случае будут подвергаться специальному исследованию.

Теорема 1. Производная постоянного равна нулю.

Пусть дана постоянная величина c; ее можно рассматривать, как функцию независимого переменного x, т.-е.

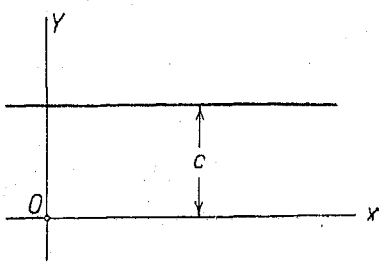
$$c=f(x),$$

так как для каждого значения имеется соответствующее (во всех случаях одно и то же) значение постоянного c.

Согласно определению производной,

$$c'=lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=lim_{h\to 0}0=0.$$



Фиг. 33.

Так как графикой уравнения $c=f(x)$ или $y=c$ служит прямая, параллельная оси X и отстоящая от нее на расстоянии, равном c, то доказанная теорема геометрически очевидна (фиг. 33).

Впоследствии (гл. II, § 5, теорема 1) будет доказана обратная теорема: если производная внутри некоторого интервала равна нулю, то начальная функция в этом интервале постоянна.

Теорема 2. Производная независимого переменного равна единице.

Независимое переменное x можно рассматривать, как функцию его самого, т.-е.

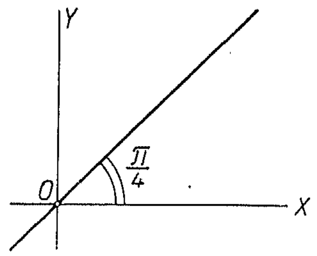
$$x = f(x),$$

так как для каждого значения x имеется соответствующее (в каждом случае то же самое) значение $f(x)$.

Согласно определению производной

$$x_x' = lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Так как графикой уравнения $x = f(x)$ или $y = x$ служит прямая, проходящая через начало координат и образующая с осью X угол в $\frac{\pi}{4}$, то доказанная теорема геометрически очевидна (фиг. 34).



Фиг. 34.

Теорема 3. Производная функции от функции, или производная сложной функции, равна произведению производной этой функции по аргументу на производную аргумента по независимому переменному.

Пусть $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$. Тогда, по определению производной,

$$y_t' = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \; lim \frac{\Delta x}{\Delta t} =$$

$$= lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \; lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = y_x' \cdot x_t',$$

так как предел произведения равен произведению пределов (часть первая, § 8, теорема 3) и, кроме того, $\Delta x \to 0$, если $\Delta t \to 0$, согласно определению непрерывной функции (часть первая, § 11). Эту теорему можно распространить на любое число функций.

Вообще, если

$$y = f(x),\ x = \varphi(t),\ t = \psi(u),\ .\ .\ .\ .\ ,\ z = F(w),$$

то

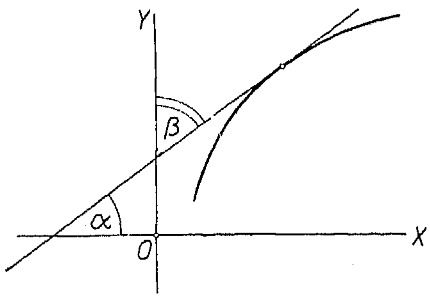
$$y_w' = y_x'\, x_t'\, t_u' \ .\ .\ .\ z_w';$$

соотношение это получается, как результат перехода к пределу при $\Delta w \to 0$, из следующего тождества

$$\frac{\Delta y}{\Delta w} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta u} \ .\ .\ .\ \frac{\Delta z}{\Delta w}.$$

Теорема 4. Производные обратных функций обратны по величине.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$. По теореме 3, $y_y' = y_x' \cdot x_y'$, но $y_y' = 1$ (теорема 2), так что $1 = y_x' \cdot x_y'$, откуда $y_x' = \frac{1}{x_y'}$. Если принять во внимание, что $y_x' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ (фиг. 35) и $\operatorname{tg} \beta = x_y'$, то доказанная теорема является геометрически очевидной.



Фиг. 35.

Теорема 5. Если функция y и аргумент x связаны друг с другом при помощи параметра t, т.-е. если $y = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$, то производная функции по аргументу равна частному от деления производной функции по параметру на производную аргумента по тому же параметру.

В самом деле,

$$y_x' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y_t'}{x_t'},$$

так как предел дроби равен дроби пределов.

Теорема 6. Производная алгебраической суммы равна таковой же сумме производных от слагаемых.

Пусть дана алгебраическая сумма $u + v - w + \ .\ .\ .\ + z$, где

$$u = f(x),\ v = \varphi(x),\ w = \psi(x),\ .\ .\ .\ ,\ z = F(x).$$

Согласно определению производной,

$$(u+v-w+\ldots+z)'=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v-w+\ldots+z)}{\Delta x}=$$

$$=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v-\Delta w+\ldots+\Delta z}{\Delta x}=$$

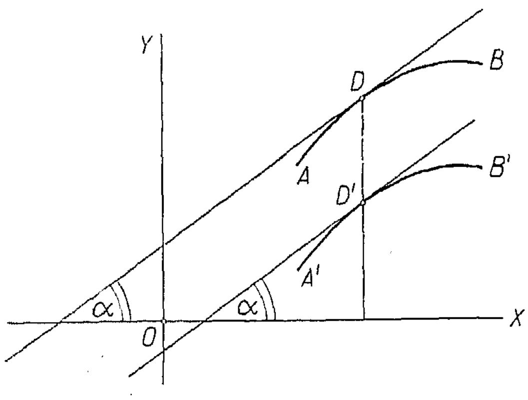
$$=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}+\ldots+lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=$$

$$=u'+v'-w'+\ldots+z',$$

так как предел суммы равен сумме пределов.

Теорема 7. Производные двух функций, разнящихся на постоянное или, в частности, равных между собою, равны друг другу.

Пусть $u=f(x)$, а c—постоянное; тогда, на основании теорем 6 и 1, $(u+c)'=u'+c'=u'$. Если принять во внимание, что кривые ADB и $A'D'B'$, уравнения которых соответственно $y=f(x)+c$ и $y=f(x)$, представляют одну и ту же кривую, только перемещенную вдоль оси Y, то доказанная теорема геометрически очевидна.



Фиг. 36.

Впоследствии (гл. II, § 5, теорема 2) будет доказана обратная теорема: если производные двух функций внутри некоторого интервала равны, то сами функции в этом интервале могут разниться только на постоянное.

Теорема 8. Производная произведения равна сумме произведений, которые получаются путем умножения производной каждого множителя на остальные сомножители.

Пусть $u=f(x)$ и $v=\varphi(x)$. Согласно определению производной,

$$(uv)'=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=$$

$$=lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+$$

$$+lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)=v\,lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\,lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+$$

$$+lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=vu'+uv',$$

так как предел суммы равен сумме пределов, постоянные множители u и v можно выносить за знак предела (часть первая, § 8, следствие теоремы 3);

и, наконец, предел бесконечно малой величины Δv равен нулю (часть первая, § 7).

Разделив обе части равенства $(uv)'=u'v+v'u$ на произведение uv, получим так называемую логарифмическую производную:

$$\frac{(uv)'}{uv}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}.$$

Пусть теперь дано более двух сомножителей:

$$u=f(x),\ v=\varphi(x),\ w=\psi(x),\ \ldots,\ z=F(x).$$

Тогда, применяя несколько раз только что доказанную формулу для двух сомножителей, получим:

$$\begin{aligned}(uvw\ldots z)' &= u'vw\ldots z+u(vw\ldots z)'=u'vw\ldots z+uv'\ldots z+uv(w\ldots z)'=\\ &=u'vw\ldots z+uv'w\ldots z+uvw'\ldots z+uvw(\ldots z)'=\ldots\ldots=\\ &=u'vw\ldots z++uv'w\ldots z+uvw'\ldots z+\ldots+uvw\ldots z'\end{aligned}$$

или в виде логарифмической производной

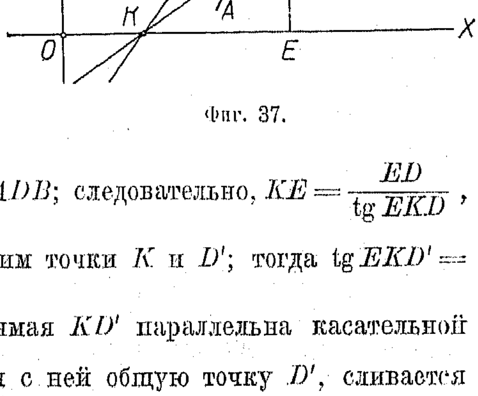
$$\frac{(uvw\ldots z)'}{uvw\ldots z}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}+\ldots+\frac{z'}{z}.$$

Теорема 9. Постоянный множитель (или делитель) можно вносить под знак производной и выносить из-под знака производной.

По предыдущей теореме $(cu)'=c'u+cu'$ или, так как по теореме 1-й $c'=0$,

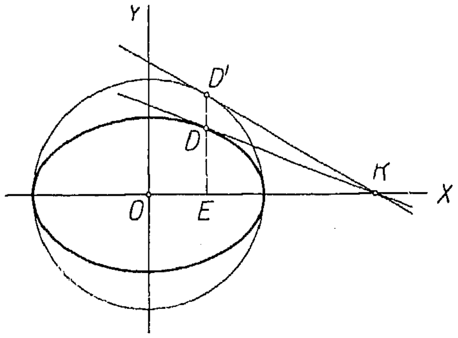
$$(cu)'=cu'.$$

На основании этой теоремы можно доказать, что касательные в точках D и D', лежащих на одной и той же прямой, параллельной оси Y, к кривым ADB и $A'D'B'$ (фиг. 37), уравнения которых соответственно $y=cf(x)$ и $y=f(x)$, пересекаются на оси X. В самом деле,



Фиг. 37.

пусть прямая KD касается кривой ADB; следовательно, $KE=\frac{ED}{\operatorname{tg} EKD}$, т.-е. $KE=\frac{cf(x)}{[cf(x)]'}=\frac{f(x)}{f'(x)}$. Соединим точки K и D'; тогда $\operatorname{tg} EKD'=$ $=\frac{ED'}{KE}=f(x):\frac{f(x)}{f'(x)}=f'(x)$, т.-е. прямая KD' параллельна касательной к кривой $A'D'B'$ в точке D' и, имея с ней общую точку D', сливается с этой касательной. Доказанной теоремой можно воспользоваться для проведения касательной, например, к эллипсу $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ при помощи круга $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (фиг. 38).



Фиг. 38.

Теорема 10. Производная дроби равна дроби, у которой знаменателем служит квадрат знаменателя, а числителем — разность; уменьшаемое этой разности равно произведению знаменателя на производную числителя, а вычитаемое — произведению числителя на производную знаменателя.

Пусть дана дробь $y=\frac{u}{v}$, откуда $u=yv$. По теоремам 7-й и 8-й, $u'=vy'+v'y$ или $y'=\frac{u'-v'y}{v}$; следовательно, по замене y через $\frac{u}{v}$, получаем $v\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'-v'\frac{u}{v}}{v}$ или $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Теорема 11. Производная степени равна произведению показателя ее на степень, показатель который на единицу меньше.

Пусть показатель a степени x^a целое положительное число; тогда по теоремам 8-й и 2-й

$$(x^a)'=(xxx\ldots x)'=1xxx\ldots x+x\cdot 1\cdot x\ldots x+ \\ +xx1\ldots x+\ldots xxx\ldots x1,$$

откуда $(x^a)'=ax^{a-1}$. В дальнейшем [§ 5, формула (3)] будет доказано, что эта теорема верна для какого угодно показателя a.

§ 5. Производные основных элементарных функций.

Как уже было отмечено (§ 4), для нахождения производной любой функции достаточно знать производные только одиннадцати основных элементарных функций. К выводу этих формул мы и приступаем.

1. Производная показательной функции $y=a^x$, где $a>0$, равна $a^x\ln a$.

Согласно определению производной,

$$(a^x)'=lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h-1}{h}=a^x\,lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a \quad (1)$$

(часть первая, § 8, следствие теоремы 3, а также § 8, пример 4). Если $a=e$, то формула получает особенно простой вид:

$$(e^x)'=e^x,$$

так как $\ln e=1$.

2. Производная логарифмической функции $y=\lg_a|x|$, где $a>0$, равна $\frac{1}{x\ln a}$.

Так как логарифмическая функция обратна показательной, то $|x|=a^y$, или $x=\pm a^y$. По теореме 4-й § 4, $(\lg_a|x|)_x'=\frac{1}{(\pm a^y)_y'}$, но $(\pm a^y)_y'=\pm(a^y)_y'=\pm a^y\ln a=x\ln a$ по теореме 9-й § 4 и по предшествующей формуле (1). Таким образом,

$$(\lg_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{2}$$

К тому же результату можно притти и непосредственно на основании определения производной.

Если $a=e$, то полученная формула получает особенно простой вид:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}. \tag{2'}$$

3. Производная степенной функции $y=x^a$, где a — какое угодно число, равна ax^{a-1}.

Логарифмируем обе части равенства $y=x^a$:

$$\ln|y|=a\ln|x|. \tag{2'}$$

По теореме 3 § 4 и формуле (2), $(\ln|y|)_x'=\frac{y^{x\prime}}{y}$; с другой стороны, $(a\ln|x|)'=\frac{a}{x}$. Следовательно, $\frac{y_x'}{y}=\frac{a}{x}$, откуда $y_x'=y\frac{a}{x}$ или $(x^a)'=x^a\frac{a}{x}$, т.-е.

$$(x^a)'=ax^{a-1}. \tag{3}$$

4. Производная тригонометрической функции $y=\sin x$ равна $\cos x$.

На основании определения производной,

$$(\sin x)'=lim_{\,h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=lim_{\,h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$=lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x$$

(часть первая, теорема 3, § 8, а также теорема 1, § 11 и пример 1, § 8).

5. Производная тригонометрической функции $y=\cos x$ равна $-\sin x$.

Так как $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, то, полагая $x+\frac{\pi}{2}=u$, получим $y=$ $=\sin u$, по теореме о производной сложной функции (§ 4, теорема 3)

$y_x' = (\sin u)_u' \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)_x'$; по предшествующей формуле и по теоремам 7-й и 2-й § 4, $(\sin u)_u' = \cos u$, $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)_x' = 1$ и, следовательно, $y_x' = \cos u$; так как $\cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, то

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5}$$

6. Производная тригонометрической функции $y = \operatorname{tg} x$ равна $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Так как $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то, по теореме 10 § 4,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x};$$

по двум последним формулам,

$$(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)' = \cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x) = 1$$

и, следовательно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6}$$

7. Производная тригонометрической функции $y = \operatorname{ctg} x$ равна $-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Так как $\operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x)^{-1}$, то, по формуле (3) и теореме о производной сложной функции (§ 4, теорема 3),

$$(\operatorname{ctg} x)' = -1 \cdot (\operatorname{tg} x)^{-2}\,(\operatorname{tg} x)';$$

вследствие равенства $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и по предшествующей формуле

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

откуда

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{7}$$

8. Производная круговой функции $y = \arcsin x$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Так как эта функция обратна синусу, то $x = \sin y$, а следовательно, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. По теореме 4-й § 4

$$(\arcsin x)_x' = \frac{1}{(\sin y)_y'};$$

по формуле 4-й, $(\sin y)_y' = \cos y$ или $(\sin y)_y' = \sqrt{1-x^2}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8}$$

В виду того, что мы рассматриваем только главную ветвь функции $y = \arcsin x$, т.-е. между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, $\cos y = \sqrt{1-x^2} > 0$.

9. Производная круговой функции $y = \arccos x$ равна

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Совершенно аналогично предшествующему случаю пишем: $x = \cos y$; тогда $\sin y = +\sqrt{1-x^2}$, так как главная ветвь функции лежит в интервале $(0, \pi)$. По теореме 4-й § 4, $(\arccos x)_x' = \frac{1}{(\cos y)_y'}$. Так как $(\cos y)_y' = -\sin y$ [см. формулу (5)], то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{9}$$

10. Производная круговой функции $y = \operatorname{arctg} x$ равна

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Берем обратную функцию $x = \operatorname{tg} y$; тогда $\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Так как $(\operatorname{arctg} x)_x' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)_y'} = \cos^2 y$ [см. формулу (6)], то

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{10}$$

11. Производная круговой функции $y = \operatorname{arcctg} x$ равна

$$-\frac{1}{1+x^2}.$$

Так как $x = \operatorname{ctg} y$, а $\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, то $(\operatorname{arcctg} x)_x' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)_y'} = -\sin^2 y$ [см. формулу (7)] и, следовательно,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{11}$$

Подведем итог полученным формулам, предполагая вместе с тем, что аргумент x, в свою очередь, есть функция; тогда, на основании теоремы о производной сложной функции (теорема 3, § 4), получим следующую таблицу формул:

$$1)\ (a^x)' = a^x x' \ln a, \qquad 1')\ (e^x)' = e^x x',$$

$$2)\ (\lg_a |x|)' = \frac{x'}{x \ln a}, \quad 2')\ (\ln|x|)' = \frac{x'}{x},$$

$$3)\ (x^a)' = a x^{a-1} x',$$

$$4)\ (\sin x)' = \cos x \cdot x',$$

$$5)\ (\cos x)' = -\sin x \cdot x',$$

$$6)\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{x'}{\cos^2 x},$$

$$7)\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{x'}{\sin^2 x},$$

$$8)\ (\arcsin x)' = \frac{x'}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$9)\ \arccos x = -\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$10)\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{x'}{1+x^2},$$

$$11)\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{x'}{1+x^2}.$$

В том случае, если аргумент x независимое переменное или линейная функция вида $x = t + c$, где t — независимое переменное, а c — постоянное, $x' = 1$ (§ 4, теорема 1 и теорема 7).

При помощи этих формул мы можем получить производную любой функции.

ПРИМЕР 1. $y = e^{\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\sin(\ln|x|)} - e^{\sin(\ln\left|\frac{1}{x}\right|)}\right)\right]}$;

$$y' = \frac{e^{\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\sin(\ln|x|)} - e^{-\sin(\ln|x|)}\right)\right]}}{1+\left[\frac{1}{2}\left(e^{\sin(\ln|x|)} - e^{-\sin\ln|x|}\right)\right]^2} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\sin(\ln|x|)} + e^{-\sin(\ln|x|)}\right)\frac{\cos(\ln|x|)}{x}.$$

После простых алгебраических преобразований

$$y' = 2e^{\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\sin(\ln|x|)} - e^{-\sin(\ln|x|)}\right)\right]} \cdot \frac{\cos(\ln|x|)}{x\left(e^{\sin(\ln|x|)} + e^{-\sin(\ln|x|)}\right)}.$$

ПРИМЕР 2 (на неявные функции). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, \text{ откуда } y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

ПРИМЕР 3. $y = u^v$, где $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$.

Логарифмируем $y = u^v$:

$$\ln|y| = v \ln|u|;$$

$$\frac{y'}{y}=v'\ln|u|+v\frac{u'}{u}, \quad y'=u^{v-1}[u'v+uv'\ln|u|].$$

ПРИМЕР 4. $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ y_x'=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$

§ 6. Производные высших порядков.

Мы видели, что первая производная, как и начальная, есть функция независимого переменного (§ 1), и, следовательно, совершенно естественно задаться вопросом об отыскании ее производной; производная первой производной называется второй производной начальной. Продолжая этот процесс дальше, мы можем получить третью производную, т.-е. производную от второй производной и, вообще, n-ую производную или производную n-го порядка, т.-е. производную от производной порядка $n-1$.

Обозначения производной n-го порядка следующие:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}y=y_x^{(n)}=y^{(n)}=D_x^n y=\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=f^{(n)}(x)=D^n f(x).$$

Рассмотрим примеры на отыскание производных высших порядков, при чем в выводе общих формул мы будем опускать доказательство способом математической индукции от n-ой производной к $(n+1)$-ой.

ПРИМЕР 1.
$$\begin{aligned}
&y=x^a,\\
&y'=ax^{a-1},\\
&y''=a(a-1)x^{a-2},\\
&y'''=a(a-1)(a-2)x^{a-3},\\
&y^{IV}=a(a-1)(a-2)(a-3)x^{a-4},\\
&y^{V}=a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)x^{a-5},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+2)(a-n+1)x^{a-n}.
\end{aligned}$$

Если a целое положительное число, то приравняем ему n; тогда

$$(x^a)^{(a)}=a(a-1)(a-2)(a-3)\cdots 2\cdot 1=a!;$$

следовательно, $(x^a)^{(n)}=0$ при $n>a$.

ПРИМЕР 2.
$$\begin{aligned}
&y=(1+x)^a,\\
&y'=a(1+x)^{a-1},\\
&\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\\
&y^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 3.
$$\begin{aligned}
&y=\ln|1+x|,\\
&y'=(1+x)^{-1},\\
&y''=-1(1+x)^{-2},\\
&y'''=1\cdot 2(1+x)^{-3},\\
&y^{IV}=-1\cdot 2\cdot 3(1+x)^{-4},
\end{aligned}$$

$$y^{V}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(1+x)^{-5},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{(1+x)^{n}}\,.$$

ПРИМЕР 4. $y=e^{x},\ y'=e^{x};\ y''=e^{x},\ .\ .\ .\ ,\ y^{(n)}=e^{x}.$

ПРИМЕР 5. $y=\sin x,$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV}=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

ПРИМЕР 6. $y=\cos x,$

$$y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

ПРИМЕР 7. $y=uv,$

$$y'=u'v+v'u,$$
$$y''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv''',$$
$$y^{IV}=u^{IV}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{IV}.$$

Подмечая, что коэффициенты подчиняются закону биномиальных коэффициентов, получаем формулу Лейбница:

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v'''+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{n}{1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

ПРИМЕР 8. Найти вторую производную неявной функции y, определяемой уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Дифференцируем обе части его два раза:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0;\quad \frac{1}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{yy''}{b^2}=0;$$

отсюда

$$y''=-\frac{b^2+a^2y'^2}{a^2y}$$

или, так как $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$,

$$y''=-\frac{b^2+a^2\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{a^2y};$$

по упрощении, $y''=-b^2\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^4y^3}$, но $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; следовательно,

$$y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

На основании того, что скорость есть производная пространства по времени, а ускорение—производная скорости по времени (§ 3), получаем, что ускорение есть вторая производная от пространства по времени.

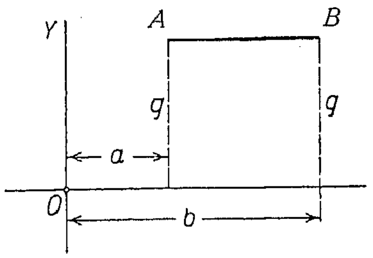
ГЛАВА II.

Основные теоремы.

§ 1. Теорема Ролля.

Если функция имеет внутри интервала производную и на границах его принимает равные значения, то производная обращается в ноль в этом интервале по крайней мере один раз.

При доказательстве этой теоремы возможны три случая.



Фиг. 39.

1. Функция $y=f(x)$ получает одно и то же числовое значение $g=f(a)=f(b)$ не только на границах интервала (a, b), но и внутри его, т.-е. она постоянна; производная же постоянного $g=f(x)$ равна нулю (§ 4, теорема 1); таким образом, $f'(x)=0$ в каждой точке интервала (a, b).

Графически этот случай представляется фиг. 39.

2. Функция $y=f(x)$ сперва возрастает от значения $g=f(a)$; тогда с того момента, когда аргумент получит некоторое значение c, она должна убывать, чтобы вернуться к прежнему значению $g=f(b)$. Следовательно, $f(c+h)-f(c)<0$ при $h \gtrless 0$; отсюда

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \quad \text{при } h<0,$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0 \quad \text{при } h>0.$$

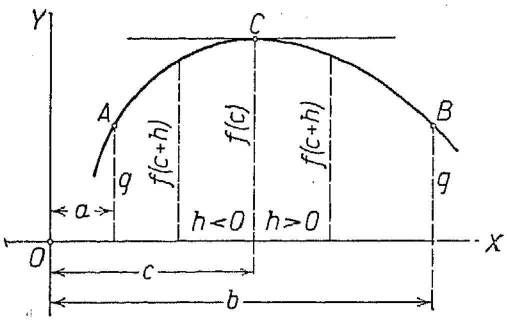
Перейдем к пределу, предполагая, что h стремится к нулю, оставаясь в первом случае отрицательным, т.-е. $h \to -0$, а во втором положительным, т.-е. $h \to +0$. Тогда (часть первая, § 8, следствие теоремы 5)

$$lim_{h \to -0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$$

$$lim_{h \to +0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0.$$

Так как производная единственна, то оба предела одинаково равны $f'(c)$; так как производная эта конечна и вместе с тем не может быть одновременно положительна и отрицательна, то $f'(c)=0$.

Графически этот случай представляется фиг. 40.



Фиг. 40.

3. Функция $y=f(x)$ сперва убывает от значения $g=f(a)$; тогда с некоторого значения аргумента c она начнет возрастать, чтобы получить прежнее значение $g=f(b)$. Таким образом, $f(c+h)-f(c)>0$ при $h \gtrless 0$; отсюда

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0 \quad \text{при } h<0,$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \quad \text{при } h>0.$$

По переходе к пределу, получим

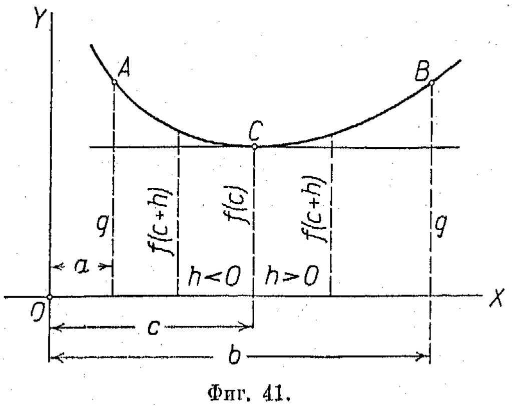
$$lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0,$$

$$lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0,$$

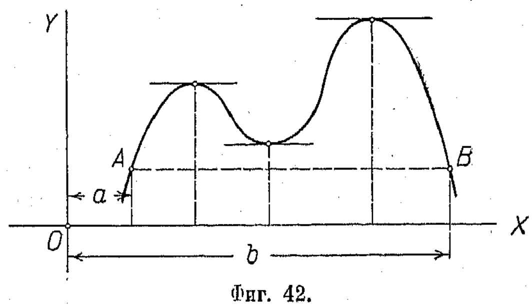
откуда $f'(c)=0$.

Графически этот случай представляется фиг. 41.

Как показывает фиг. 42, первая производная может обращаться в ноль в интервале (a, b) не один, а несколько раз. Отсюда же видим, что теореме Ролля можно дать такую геометрическую форму: *у всякой дуги существует по крайней мере одна касательная, параллельная хорде, стягивающей эту дугу.*



Фиг. 41.



Фиг. 42.

Положим, что функция $y=f(x)$ обращается в нуль на границах интервала, так что $f(a)=f(b)=0$; тогда теорему Ролля можно формулировать таким образом: *между двумя корнями функции существует по крайней мере один корень производной.*

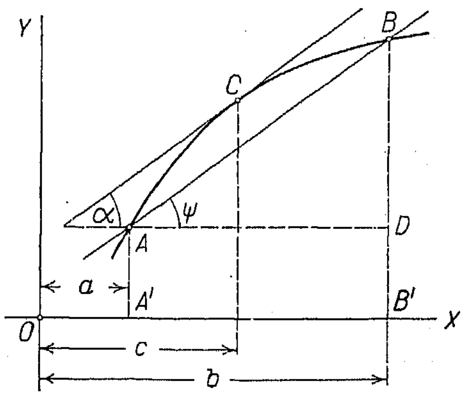
Фиг. 31 и 32 (стр. 37) показывают, что, если производная в какой-либо точке интервала не единственна или не конечна, то теорема Ролля может быть не верна.

§ 2. Теорема Лагранжа.

Если функция $f(x)$ имеет внутри интервала (a, b) производную $f'(x)$, то внутри этого интервала существует такое число c, что

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Теорему эту, называемую также теоремою о среднем значении или теоремой о конечных приращениях, аналитически мы докажем, как частный случай теоремы Коши (§ 3). Геометрически же она очевидна, если на одной из фиг. 40, 41, 42 повернем на некоторый угол оси координат (см. фиг. 43). В самом деле, на дуге ACB существует по крайней мере одна точка C, в которой касательная параллельна стягивающей дугу хорде (§ 1). Обозначим углы с осью X хорды и касательной соответственно через ψ и α и проведем ординаты крайних точек A и B дуги, а затем опустим перпендикуляр AD на правую ординату; из прямоугольного треугольника ABD получаем, что $DB=AD\operatorname{tg}DAB$, но угол DAB равен углу ψ, а также и углу α вследствие параллельности хорды и касательной; $DB=B'B-B'D=B'B-A'A=f(b)-f(a)$, $AD=A'B'=OB'-OA'=b-a$, $\operatorname{tg}DAB=\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\alpha=f'(c)$, так что окончательно получаем:



Фиг. 43.

$$f(b)-f(a)=(b-a)\, f'(c).$$

Теорема Ролля представляет частный случай теоремы Лагранжа, так как, в случае $f(a)=f(b)$, $0=(b-a)f'(c)$, откуда $f'(c)=0$.

Теореме Лагранжа $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ придают различные формы. Так как число c лежит в интервале (a, b), то, чтобы получить из числа a число c, нужно к a прибавить не весь интервал $b-a$ (тогда получилось бы b), а только часть его, т.-е. $\vartheta(b-a)$, где ϑ—положительное число, меньшее 1; следовательно, $c=a+\vartheta(b-a)$, и теорема Лагранжа принимает вид:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\vartheta(b-a)].$$

Полагая $b-a=h$, мы дадим формуле Лагранжа такой вид:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a-\vartheta h)$$

или, заменяя a через x,

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\vartheta h).$$

§ 3. Теорема Коши.

Пусть кривая AB (фиг. 43') дана при помощи параметрических уравнений $x=\varphi(t)$ и $y=f(t)$ и пусть координаты точек A, B, C будут соответственно $\varphi(a)$ и $f(a)$, $\varphi(b)$ и $f(b)$, $\varphi(c)$ и $f(c)$; тогда полученное (см. § 2) из прямоугольного треугольника ABD равенство $DB = AD \operatorname{tg} DAB$ примет такой вид:

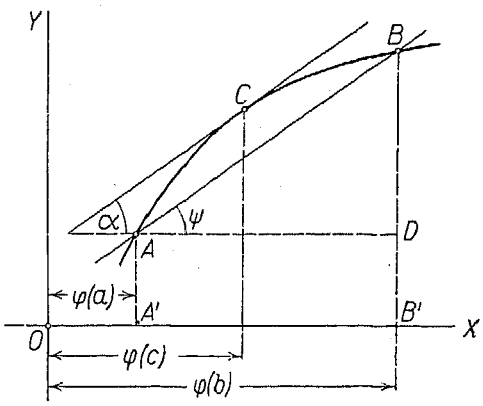
$$f(b)-f(a)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

или

$$[f(b)-f(a)]\,\varphi'(c)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(c) \quad (1)$$

в виду того, что $DB=B'B-B'D=B'B-A'A=f(b)-f(a)$, $AD=A'B'=OB'-OA'=\varphi(b)-\varphi(a)$,

$$\operatorname{tg}DAB=\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \text{ (теор. 5, § 4).}$$



Фиг. 43'.

Равенство (1) представляет теорему Коши, которая может быть формулирована таким образом:

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ *) имеют производные внутри интервала (a,b), то внутри этого интервала существует такое число c, что $[f(b)-f(a)]\,\varphi'(c)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(c)$.

Чтобы дать аналитическое доказательство теоремы Коши, построим такую функцию:

$$F(x)=[f(b)-f(a)]\,\varphi(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f(x).$$

Покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

$$F(b)=[f(b)-f(a)]\,\varphi(b)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f(b)=-f(a)\,\varphi(b)+f(b)\,\varphi(a),$$
$$F(a)=[f(b)-f(a)]\,\varphi(a)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f(a)=f(b)\,\varphi(a)-f(a)\,\varphi(b),$$

т. е.

$$F(b)=F(a).$$

Следовательно, внутри интервала (a,b) существует такое число c, что $F'(c)=0$; но

$$F'(x)=[f(b)-f(a)]\,\varphi'(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(x),$$

так что

$$F'(c)=[f(b)-f(a)]\,\varphi'(c)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(c)=0,$$

откуда

$$[f(b)-f(a)]\,\varphi'(c)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(c).$$

Полагая $\varphi(x)=x$ и, следовательно, $\varphi'(x)=1$, мы получим формулу Лагранжа:

*) Аргумент данных функций мы обозначаем буквой x, взамен употреблявшейся перед этим буквы t.

$$[f(b)-f(a)]\cdot 1=[b-a]f'(c)$$

или

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c);$$

таким образом, доказав теорему Коши, мы тем самым доказали теорему Лагранжа.

§ 4. Теорема Тэлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные, кончая порядком n, внутри интервала (a, b), то внутри этого интервала существует такое число c, что

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(c),$$

где p — любое положительное число.

Для доказательства построим такие две функции

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)+\frac{(b-x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x)+\ldots+$$
$$+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$
$$\varphi(x)=(b-x)^p,$$

где $p>0$.

Найдем их производные:

$$F'(x)=f'(x)-f'(x)+\frac{b-x}{1}f''(x)-\frac{b-x}{1}f''(x)+\frac{(b-x)^2}{1\cdot 2}f'''(x)-$$
$$-\frac{(b-x)^2}{1\cdot 2}f'''(x)+\frac{(b-x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f^{IV}(x)-\ldots-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+$$
$$+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)=\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x),$$
$$\varphi'(x)=-p(b-x)^{p-1}.$$

Примем во внимание, что

$$F(b)=f(b),\quad \varphi(b)=0,$$
$$F(a)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a),$$
$$\varphi(a)=(b-a)^p,$$
$$F'(c)=\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c),\quad \varphi'(c)=-p(b-c)^{p-1}.$$

Применим к функциям $F(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши (§ 3):

$$[F(b)-F(a)]\,\varphi'(c)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,F'(c)$$

или

$$\left[f(b)-\left\{f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right\}\right]\cdot$$
$$\cdot[-p(b-c)^{p-1}]=[0-(b-a)^p]\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c),$$

откуда

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(c).$$

Последний член в формуле Тэлора называется остаточным членом и обозначается через R_n:

$$R_n=\frac{(b-a)^p(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(c).$$

Так как числу p можно давать любое положительное значение, то положим $p=n$ и получим тогда остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c);$$

при $p=1$ получится остаточный член в форме Коши

$$R_n=\frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c).$$

Полагая в формуле Тэлора $p=n=1$, получим формулу Лагранжа; следовательно, последняя представляет частный случай первой.

Рассмотрим различные виды формулы Тэлора.

1. Положим $c=a+\vartheta(b-a)$; тогда

$$b-c=b-a-\vartheta(b-a)=(1-\vartheta)(b-a)$$

и

$$R_n=\frac{(b-a)^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}[a+\vartheta(b-a)],$$

так что

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}[a+\vartheta(b-a)]. \quad (1)$$

2. Заменим b через x:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)]. \quad (2)$$

3. Положим $x-a=h$:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(a+\vartheta h). \quad (3)$$

4. Заменим a через x:

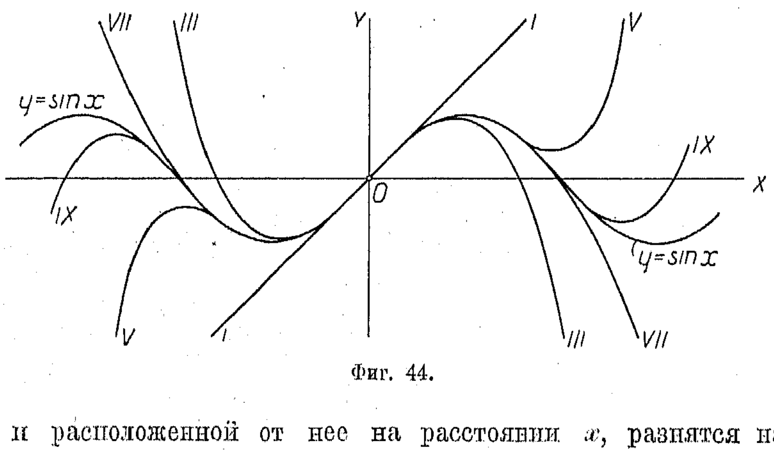
$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\ .\ .\ .\ +$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(x+\vartheta h). \qquad (4)$$

5. Заменив x через 0 и h через x, получим формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ .\ .\ .\ +$$
$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(\vartheta x). \qquad (5)$$

Легко заметить, что формула (5) получается непосредственно из формулы (2), если положить $a=0$.

Можно дать геометрическое истолкование полученым результатам. Так как начало координат всегда можно перенести в точку оси X, абсцисса которой равна a, то, нисколько не нарушая общности, мы можем положить $a=0$, т.-е. взять формулу Маклорена (5); примем, кроме того, во внимание, что уравнение $y=\psi(x)$, где $\psi(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+$ $+\ .\ .\ .\ +\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)$, изображает параболу порядка $n-1$, в частности, при $n<2$, прямую. Сравнивая уравнение кривой $y=f(x)$ с уравнением параболы $y=\psi(x)$, мы видим, что ординаты точек пересечения обеих кривых с одной и той же прямой, параллельной



Фиг. 44.

оси Y и расположенной от нее на расстоянии x, разнятся на остаточный член $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x)$, который взят нами в данном случае в форме Лагранжа, т.-е. при $p=n$. Если производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна, то $f^{(n)}(\vartheta x)=f^{(n)}(0)+\alpha$, где α — бесконечно малая величина при таком же x (часть первая, § 11), так что $\frac{x^n}{n!}$ и, следовательно, остаточный член $R_n=\frac{x^n}{n!}[f^{(n)}(0)+\alpha]$ с ростом индекса n будут все убывать, и, таким образом, многочлен $\psi(x)$, будет давать значения все более и более близкие к $f(x)$, а парабола, которая называется подходящей, все ближе и ближе будет подходить к кривой $y=f(x)$ и, следовательно, давать все более и более точное представление о ходе этой кривой около оси Y. Данные на фиг. 44 графики синусоиды $y=\sin x$ и подходящих к ней прямой

$$y=x \tag{I}$$

и парабол

$$y=x-\frac{x^3}{3!}, \tag{III}$$

$$y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}, \tag{V}$$

$$y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}, \tag{VII}$$

$$y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!} \tag{IX}$$

иллюстрируют только что высказанные положения.

§ 5. Свойства функций.

Опираясь на доказанные теоремы, выведем ряд свойств функций.

Теорема 1. Если производная внутри некоторого интервала равна нулю, то начальная функция в этом интервале постоянна.

Пусть дана функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ в интервале (a, b) равна нулю. Возьмем внутри этого интервала два числа x и $x+h$; тогда, по теореме Лагранжа (§ 2), $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\vartheta h)$; так как число $x+\vartheta h$ заключено в интервале $(x, x+h)$, то подавно оно лежит в интервале (a, b), так что $f'(x+\vartheta h)=0$; следовательно, если положить $f(x)=c$, то $f(x+h)-c=0$ или $f(x+h)=c$. Давая h все значения от $a-x$ до $b-x$, мы получим, что для всех точек внутри интервала (a, b) функция $f(x)$ принимает одно и то же значение c, т.-е. постоянна.

Теорема 2. Если производные двух функций внутри некоторого интервала равны, то сами функции в этом интервале могут разниться только на постоянное.

Пусть даны две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, и пусть их производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ равны в интервале (a, b). Построим третью функцию $F(x)=f(x)-\varphi(x)$; ее производная $F'(x)=f'(x)-\varphi'(x)$ равна нулю в этом интервале; по теореме 1, $F(x)=c$ и, следовательно, $f(x)-\varphi(x)=c$.

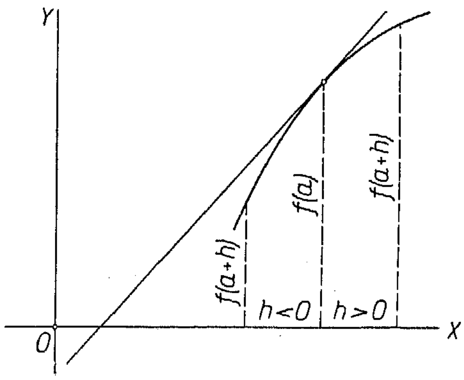
Теорема 3. Знак приращения функции совпадает со знаком произведения первой не обращающейся в ноль производной на степень соответствующего приращения аргумента, показатель которой равен порядку производной.

Положим, что $f'(a)=0$, $f''(a)=0, \ldots, f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$; тогда, по теореме Тэлора [см. формулу (3) § 4 при $p=n$],

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h);$$

если $f^{(n)}(x)$ непрерывная функция, то при достаточно малом h знак $f^{(n)}(a+\vartheta h)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$ (часть первая, § 11, теорема 2); следовательно, знак разности $f(a+h)-f(a)$ совпадает со знаком произведения $h^n f^{(n)}(a)$.

Для производной первого порядка доказанная теорема геометрически очевидна, как показывает, например, фиг. 45.



Фиг. 45.

Теорема 4. Знак выражения $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$ совпадает со знаком произведения первой не обращающейся в нуль производной (если вести счет их с производной второго порядка) на степень приращения h аргумента, показатель которой равен порядку производной.

Положим, что $f''(a)=0$, $f'''(a)=0, \ldots, f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$; тогда формула Тэлора принимает вид:

$$f(a+h)-f(a)-hf'(a)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\vartheta h)$$

[см. формулу (3) § 4 при $p=n$]; остается только повторить доказательство предыдущей теоремы.

В дальнейшем мы увидим, что произведение производной на приращение независимого переменного, т.-е. $hf'(a)$, называется дифференциалом функции, и, таким образом, выражение $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$ представляет разность между приращением функции и диференциалом ее.

ГЛАВА III.

Исследование функции и ее графики.

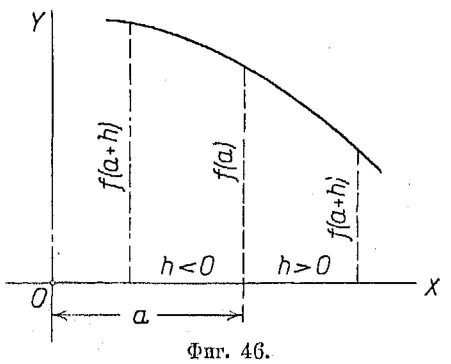
§ 1. Основные понятия.

Дадим прежде всего ряд определений.

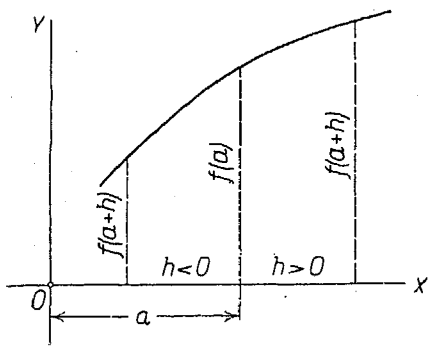
Функция называется возрастающей для данного значения аргумента, если с возрастанием его от этого значения она возрастает, а с убыванием его от этого значения она убывает.

Аналитически это определение можно представить таким образом: $f(a+h)-f(a)>0$ при $h>0$ и $f(a+h)-f(a)<0$ при $h<0$, где h достаточно мало.

На фиг. 46 изображена возрастающая функция в точке a.



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Функция называется убывающей для данного значения аргумента, если с возрастанием его от этого значения она убывает, а с убыванием его от этого значения она возрастает.

Аналитически это определение можно представить таким образом: $f(a+h)-f(a)<0$ при $h>0$ и $f(a+h)-f(a)>0$ при $h<0$, где h достаточно мало.

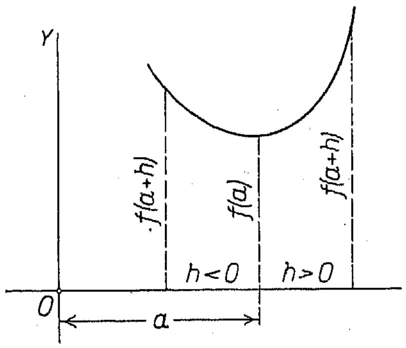
На фиг. 47 изображена убывающая функция в точке a.

Говорят, что *функция имеет минимум для данного значения аргумента, если с возрастанием или убыванием его от этого значения она возрастает.*

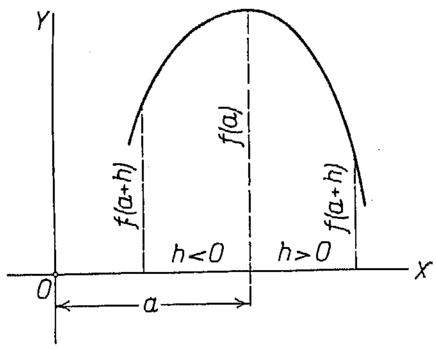
Аналитически это определение можно представить таким образом: $f(a+h)-f(a)>0$ при $h \gtrless 0$, где h достаточно мало.

На фиг. 48 изображен минимум функции в точке a.

Говорят, что **функция имеет максимум для данного значения аргумента, если с возрастанием или убыванием его от этого значения функция убывает.**



Фиг. 48.



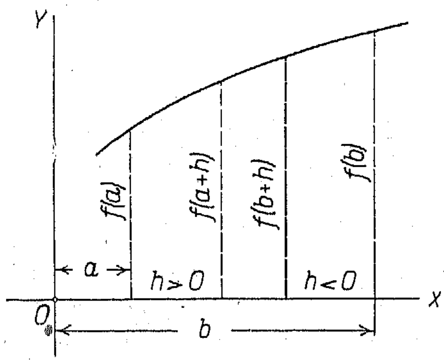
Фиг. 49.

Аналитически это определение можно представить таким образом: $f(a+h)-f(a)<0$ при $h \gtrless 0$, где h достаточно мало.

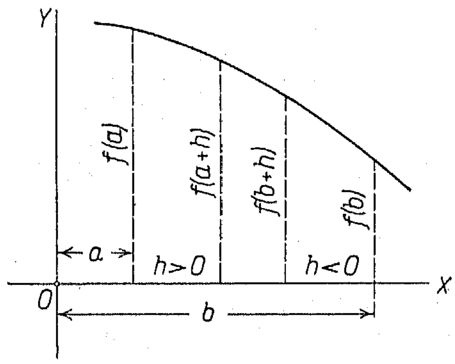
На фиг. 49 изображен максимум функции в точке a.

Все эти определения не применимы к границам интервала, в котором дана функция, так как вне этого интервала, мы ее не рассматриваем. Поэтому приходится дать особые определения для границ интервала.

Говорят, что функция имеет **левый пограничный минимум,** если с возрастанием аргумента от левой границы функция возрастает (см. фиг. 50).



Кнг. 50.



Фиг. 51.

Говорят, что функция имеет **правый пограничный максимум,** если с убыванием аргумента от правой границы она убывает (см. фиг. 50).

Говорят, что функция имеет **левый пограничный максимум,** если с возрастанием аргумента от левой границы она убывает (см. фиг. 51).

Говорят, что функция имеет **правый пограничный мини-**

мум, если с убыванием аргумента от правой границы она возрастает (см. фиг. 51).

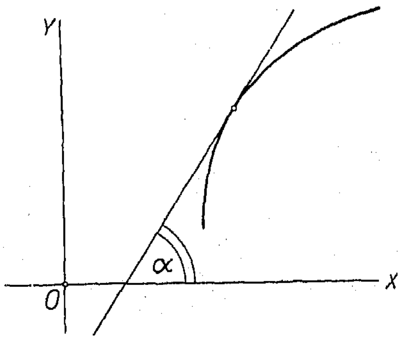
Функция называется возрастающей в данном интервале, если она возрастающая для каждого значения аргумента внутри интервала (и имеет пограничные левый минимум и правый максимум) (см. фиг. 50).

Функция называется убывающей в данном интервале, если она убывающая для каждого значения аргумента внутри интервала (и имеет пограничные левый максимум и правый минимум) (см. фиг. 51).

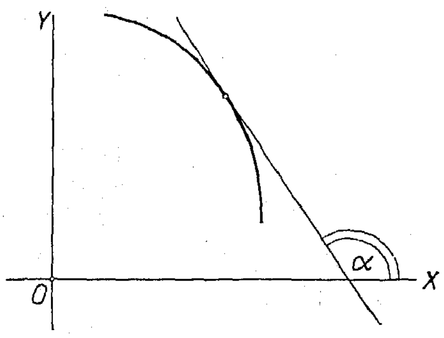
§ 2. Возрастающая и убывающая функции.

Так как приращение $f(a+h)-f(a)$ возрастающей и убывающей функции меняет свой знак одновременно с переменой знака у приращения h аргумента (§ 1) и так как знак приращения функции совпадает со знаком произведения $h^n f^{(n)}(a)$ (гл. II, § 5, теорема 3), где $f^{(n)}(a)$—первая не обращающаяся в нуль производная, то в этих обоих случаях порядок n производной, служащий вместе с тем показателем степени приращения аргумента h, должен быть нечетным числом: $n=2m+1$, где m—целое число.

Знак приращения возрастающей функции совпадает со знаком приращения аргумента (§ 1); следовательно, если функция возрастающая для данного значения аргумента, то первая не обращающаяся в нуль производная должна быть нечетного порядка и положительна для этого значения аргумента.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Для первой производной эта теорема геометрически очевидна (фиг. 52), так как угол α касательной с осью X в этом случае острый, а тангенс острого угла, т.-е. в данном случае производная, положителен.

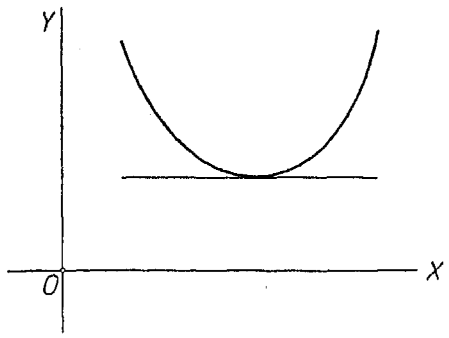
Знак приращения убывающей функции противоположен знаку приращения аргумента (§ 1); следовательно, если функция убывающая для данного значения аргумента, то первая не обращающаяся в нуль производная должна быть нечетного порядка и отрицательна для этого значения аргумента.

Для первой производной эта теорема геометрически очевидна (фиг. 53).

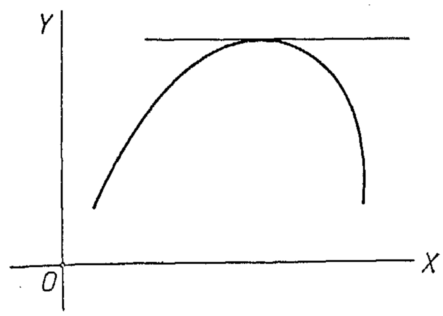
§ 3. Максимум и минимум

(первый прием нахождения).

Так как приращение функции в случае экстремум, т.-е. максимум или минимум, не меняет своего знака при перемене знака у приращения аргумента и так как знак приращения функции совпадает со знаком произведения $h^n f^{(n)}(a)$ (гл. II, § 5, теорема 3) то порядок n первой



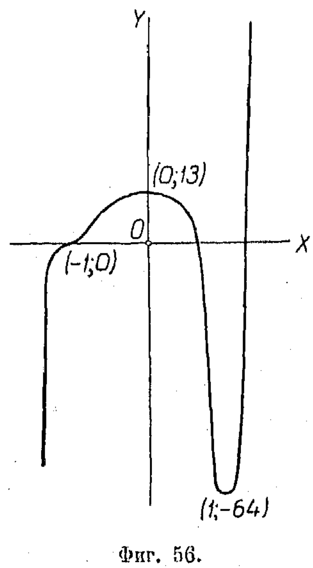
Фиг. 54.



Фиг. 55.

не обращающейся в нуль производной должен быть числом четным: $n=2m$; где m—целое число.

Приращение функции в случае минимум положительно (§ 1); следовательно, если функция имеет минимум для данного значения аргумента, то первая не обращающаяся в нуль производная должна быть четного порядка и положительна для этого значения аргумента.



Фиг. 56.

Приращение функции в случае максимум отрицательно (§ 1); следовательно, если функция имеет максимум для данного значения аргумента, то первая не обращающаяся в нуль производная должна быть четного порядка и отрицательна для этого значения аргумента.

Для первой производной представляются геометрически очевидными обе последние теоремы, утверждающие, что она, как нечетного порядка, должна обращаться в нуль (см. фиг. 54 и 55); геометрически также очевидно [см., например, точку (—1, 0) на фиг. 56], что первая производная может равняться нулю, а экстремум все-таки не будет.

Из этих же теорем вытекает способ нахождения экстремум функции. Нужно первую производную приравнять нулю и каждый из корней полученного уравнения подставить во вторую производную: если она положительна, то функция имеет минимум для соответствующего значения аргумента, если отрицательна, то—максимум. В случае равенства нулю второй производной надо исследовать третью производную: если она не равна нулю, то экстремум нет, если же равна нулю, то нужно вычислить четвертую производную, причем к ней переходит роль второй производной, и т. п.

ПРИМЕР 1. Найти экстремум функции:

$$y=40x^9+45x^8-72x^5-90x^4+13;$$
$$y'=360x^8+360x^7-360x^4-360x^3;$$
$$\frac{1}{360}y'=x^8+x^7-x^4-x^3$$

или

$$\frac{1}{360}y'=x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1);$$
$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=-1$$

(мнимые корни не рассматриваются);

$$\frac{1}{360}y''=8x^7+7x^6-4x^3-3x^2;\quad \left(\frac{1}{360}y''\right)_{x=0}=0;$$
$$\left(\frac{1}{360}y''\right)_{x=1}=8>0;\quad \left(\frac{1}{360}y''\right)_{x=-1}=0;$$
$$\frac{1}{720}y'''=28x^6+21x^5-6x^2-3x;\quad \left(\frac{1}{720}y'''\right)_{x=0}=0,\quad \left(\frac{1}{720}y'''\right)_{x=-1}=4;$$
$$\frac{1}{2160}y^{IV}=56x^5+35x^4-4x-1;\quad \left(\frac{1}{2160}y^{IV}\right)_{x=0}=-1<0.$$

Таким образом, функция имеет при $x=0$ максимум, равный 13, а при $x=1$ минимум, равный -64; при $x=-1$ она возрастающая (см. фиг. 56).

ПРИМЕР 2. $y=\frac{x+1}{x^3+5}$, $y'=\frac{-2x^3-3x^2+5}{(x^3+5)^2}$;

$$-2x^3-3x^2+5=0;\quad x=1$$

(остальные корни мнимы); положим

$$u=-2x^3-3x^2+5,\quad v=(x^3+5)^2;$$

тогда

$$y'=\frac{u}{v},\quad y''=\frac{u'v-uv'}{v^2};\quad (y'')_{x=1}=\left(\frac{u'}{v}\right)_{x=1},$$

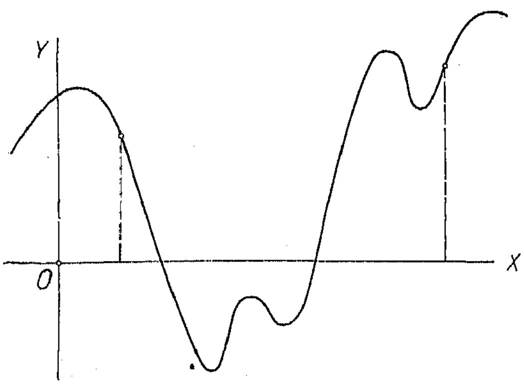
так как $(u)_{x=1}=0$; далее, в данной задаче $v>0$, ввиду чего знак $(y'')_{x=1}$ совпадает со знаком $(u')_{x=1}=(-6x^2-6x)_{x=1}<0$. Следовательно, данная дробь при $x=1$ имеет максимум, равный $1/_3$.

ПРИМЕР 3. Найти размеры цилиндрической кружки данного объема v с тем условием, чтобы материала на нее пошло возможно меньше.

Поверхность кружки $s=\pi x^2+2\pi xy$, где x—радиус основания кружки и y—ее высота, а объем $v=\pi x^2 y$; исключаем y: $s=\pi x^2+\frac{2v}{x}$; отсюда $s'=2\pi x-\frac{2v}{x^2}=0$, так что $x=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$; далее, $s''=2\pi+\frac{4v}{x^3}>0$, так как

$\pi > 0$, $x > 0$, $v > 0$; следовательно, кружка имеет наименьшую поверхность, когда диаметр основания $2x = 2\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ линейных единиц, высота $y = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ лин. ед., а поверхность $s = 3\sqrt[3]{\pi v^2}$ кв. ед.; следовательно, диаметр кружки вдвое больше ее высоты. Так, если кружка объемом в литр, то диаметр ее равен приблизительно 13,6 см, а высота 6,8 см.

В задачах прикладного характера отыскание второй производной обычно является излишним; в самом деле, в последней, например, задаче легко сообразить, что пойдет большее количество материала (аналитически $s = \infty$), если придадим кружке форму или цилиндра с очень малой высотой и большим основанием (аналитически $y = 0$ и, следовательно, $x = \infty$, так как $v = \pi x^2 y$) или длинной трубки с очень узким отверстием (аналитически $y = \infty$ и $x = 0$). Так как максимум и минимум (включая в том числе и пограничные) чередуются (см. фиг. 57), то ясно и без отыскания второй производной, что для найденного нами значения $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ будет минимум, а не максимум.



Фиг. 57.

Та же фиг. 57 показывает, что максимум может быть меньше отдельных значений функции и, в частности, меньше, чем минимум; и обратно — минимум может быть больше отдельных значений функции и, в частности, больше, чем максимум.

Ввиду того, что $[f(x)+c]' = f'(x)$ и $[cf(x)]' = cf'(x)$, функции $f(x)+c$ и $cf(x)$ будут иметь экстремум для тех же значений аргумента, что и функция $f(x)$; ввиду того, что $[f(x)+c]'' = f''(x)$ и $[cf(x)]'' = cf''(x)$, максимум будет соответствовать максимуму, а минимум — минимуму в первом случае всегда, а во втором при $c > 0$; если же во втором случае $c < 0$, то максимум соответствует минимуму и обратно; легко видеть, что эти соображения применимы к случаю возрастающей или убывающей функции [см. также фиг. 36, 37 и 38 (стр. 40—42)].

Ввиду этого постоянное слагаемое и постоянный положительный множитель можно при отыскании экстремум и вообще при исследовании функции отбрасывать (см. пример 1-й).

§ 4. Максимум и минимум

(второй прием нахождения).

В тех случаях, когда производная для данного значения аргумента не единственна или не конечна, теорема Ролля, как мы видели (гл. II, § 1), может быть и не верна, а следовательно, результаты, полученные нами, применять нельзя. Тогда рассуждают следующим образом. Если функция имеет минимум, то она сперва убывает, а потом возрастает; следовательно, ее производная сперва отрицательна, а потом положительна, т.-е. меняет свой знак с минуса на плюс. Если функция имеет максимум, то она сперва возрастает, а потом убывает; следовательно, ее производная меняет свой знак с плюса на минус. Таким образом, если перемены знака у производной нет, то нет и экстремум. Легко видеть, что этими соображениями можно пользоваться и в том случае, если условия теоремы Ролля выполняются.

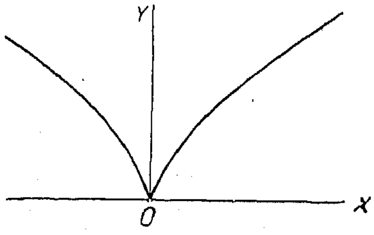
ПРИМЕР 1. Найти экстремум функции

$$y = 40x^9 + 45x^8 - 72x^5 - 90x^4 + 13.$$

Как мы видели (§ 3),

$$\frac{1}{360}y' = x^3(x-1)(x+1)^2(x^2+1).$$

Ясно, что при x отрицательном и достаточно близком к 0 (в данном случае $-\infty < x < 0$) $y' > 0$ (исключение составляет $x = -1$, когда $y' = 0$), а при x положительном и достаточно близком к 0 $(0 < x < 1)$ $y' < 0$, т.-е. первая производная меняет знак с $+$ на $-$; следовательно, сама функция y при $x = 0$ имеет максимум; при x достаточно близком к единице и меньшем ее $(0 < x < 1)$, как мы только сейчас видели, $y' < 0$, при x же достаточно близком к 1 и бо́льшем ее $(1 < x < +\infty)$ $y' > 0$, т.-е. первая производная меняет знак с $-$ на $+$; следовательно, функция y при $x = 1$ имеет минимум. Так как при переходе x через -1 первая производная знака не меняет, то экстремум будет только в указанных выше случаях.

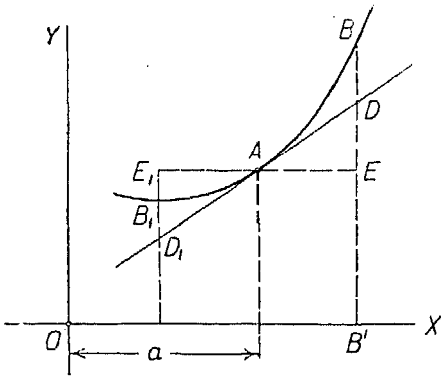


Фиг. 58.

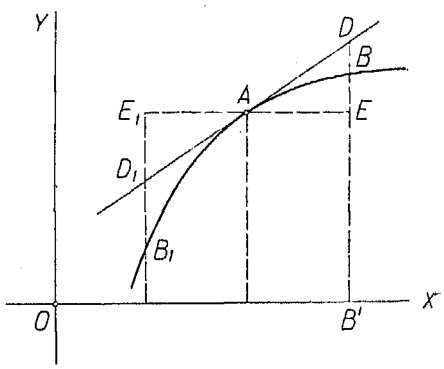
ПРИМЕР 2. Найти экстремум функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ (фиг. 58). Производная $y' = = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; при $x = 0$ первая производная не конечна и поэтому соображения, изложенные в § 3, к функции $x^{\frac{2}{3}}$ не приложимы. Приняв во внимание, что при $x < 0$ $y' < 0$, а при $x > 0$ $y' > 0$, т.-е. первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, мы получаем, что при $x = 0$ функция $x^{\frac{2}{3}}$ имеет минимум. Пример этот настолько прост, что и без отыскания первой производной виден результат: $x^{\frac{2}{3}} - 0^{\frac{2}{3}} > 0$ при всяком x.

§ 5. Вогнутость, выпуклость и точки перегиба кривой.

Если взять какую-нибудь кривую (фиг. 59_{I} и 59_{II}) и на ней произвольную точку A, а затем провести касательную к кривой в этой точке, то обыкновенно кривая вблизи точки A расположена по одну сторону от касательной — или над ней (фиг. $59_{\rm I}$) или под ней (фиг. $59_{\rm II}$). Если кривая расположена **над** касательной, т.-е. в сторону положительного направления оси Y, то говорят, что кривая своею вогнутостью обращена в точке A в сторону положительного направления оси Y, или **вогнута вверх**. Если же кривая расположена **под** касательной. т.-е. в сторону отрицательного направления оси Y, то говорят, что кривая своею вогнутостью обращена в точке A в сторону отрицательного направления оси Y, вогнута вниз или, что то же, **выпукла вверх**.



Фиг. $59_{\rm I}$.



Фиг. $59_{\rm II}$.

Посмотрим, как выразить всё это аналитически. Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, а точка A абсциссой a и, следовательно, ординатой $f(a)$; возьмем на той же кривой точку B (или B_1) с координатами $a+h$ и $f(a+h)$, а на касательной соответствующую точку D (или D_1), т.-е. такую, у которой та же самая абсцисса $a+h$; ордината же $B'D$ отличается от $f(a)$ на отрезок ED, т.-е. на величину $h\operatorname{tg}\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha=f'(a)$ угловой коэффициент касательной; следовательно, эта ордината $B'D$ равна $f(a)+hf'(a)$. Отсюда видно, что расстояние DB между соответствующими точками D касательной и B кривой, т.-е. разность $B'B-B'D$, представится трехчленом $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$. В случае вогнутости вверх кривая вблизи точки A расположена над касательной (фиг. $59_{\rm I}$); следовательно, ордината $B'B$ больше ординаты $B'D$ и полученное выражение положительно:

$$f(a+h)-f(a)-hf'(a)>0;$$

наоборот, если кривая выпукла вверх (фиг. $59_{\rm II}$),

$$f(a+h)-f(a)-hf'(a)<0.$$

Так как знак этого выражения совпадает со знаком произведения $h^n f^{(n)}(a)$ (гл. II, § 5, теорема 4), где $f^{(n)}(a)$ — первая не обращающаяся в нуль производная (если вести их счет с производной второго порядка), то в случае вогнутости вверх

$$h^n f^{(n)}(a)>0,$$

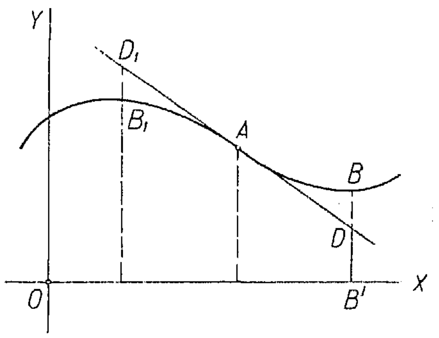
в случае выпуклости вверх

$$h^n f^{(n)}(a)<0.$$

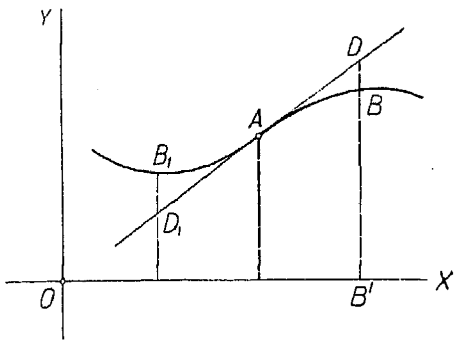
Так как в том и другом случаях полученный трехчлен, а следовательно, и произведение $h^n f^{(n)}(a)$ знака не меняют при перемене знака у приращения h аргумента, то порядок n первой не обращающейся в нуль производной должен быть в обоих случаях числом четным: $n=2m$, где m—целое число.

Рассматриваемый трехчлен в случае вогнутости вверх положителен; следовательно, **если кривая вогнута вверх в данной точке, то первая не обращающаяся в нуль производная** (если вести счет с производной второго порядка) **должна быть четного порядка и положительна для соответствующего значения аргумента.**

В случае выпуклости вверх рассматриваемый трехчлен отрицателен; следовательно, **если кривая выпукла вверх в данной точке, то первая не обращающаяся в нуль производная** (если вести счет с производной второго порядка) **должна быть четного порядка и отрицательна для соответствующего значения аргумента.**



Фиг. 59_{III}.



Фиг. 59_{IV}.

Пусть в точке A кривая меняет направление вогнутости, как бы перегибается в ней (фиг. 59_{III} и 59_{IV}); тогда точка A называется **точкой перегиба**; в этом случае рассматриваемый трехчлен и, следовательно, произведение $h^n f^{(n)}(a)$ меняют свой знак одновременно с переменой знака у приращения h аргумента; в этом случае порядок n производной, служащий вместе с тем показателем степени h, должен быть нечетным числом: $n=2m+1$, где m—целое число. Так как в случае точки перегиба отрезок DB, т. е. трехчлен $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$, меняет свой знак одновременно с приращением h, то по одну сторону точки A кривая лежит над касательной, по другую сторону—под касательной; отсюда вытекает, что касательная в точке перегиба пересекает кривую в точке касания.

Таким образом, **если данная точка кривой служит её точкой перегиба, то первая не обращающаяся в нуль производная** (если вести счет с производной второго порядка) **должна быть нечетного порядка.**

Отсюда следует, что в точке перегиба угловой коэффициент касательной, т.-е. первая производная ординаты по абсциссе, имеет экстремум.

Из этой теоремы вытекает способ нахождения точек перегиба кривой. Нужно вторую производную приравнять нулю и каждый из корней полученного уравнения подставить в третью производную: если она не равна нулю, то имеет место точка перегиба. В случае равенства нулю третьей производной, надо исследовать четвертую производную, причем к ней переходит роль второй производной: если она не равна нулю, то точки перегиба нет (в частности, если первая производная обращается в нуль, имеет место экстремум, как это следует из теорем § 3), в противном же случае надо исследовать пятую производную и т. д.

Применяя эти соображения к 1-му примеру § 3, мы убеждаемся в том, что рассматриваемая в этом примере кривая в точке $(-1, 0)$ имеет точку перегиба (см. фиг. 56, стр. 62).

ГЛАВА IV.

Вычисление предельных значений.

§ 1. Основные понятия.

Мы видели во введении в анализ (часть первая, § 8, примеры) насколько сложно отыскание пределов и поэтому насколько важно свойство непрерывной функции, что предельное значение ее равно соответствующему частному значению ее

$$lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(часть первая, § 11), — свойство, дающее возможность отыскание предела заменить простым вычислением формул; но как раз в указанных только что примерах соотношение

$$lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

неприменимо, так как получаются неопределенные выражения:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{x=0} = \frac{0}{0}, \quad \left(\frac{a^h - 1}{h}\right)_{h=0} = \frac{0}{0}, \quad \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]_{x=\infty} = 1^\infty,$$
$$\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]_{x=\infty} = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]_{x=\infty} = \infty \cdot 0.$$

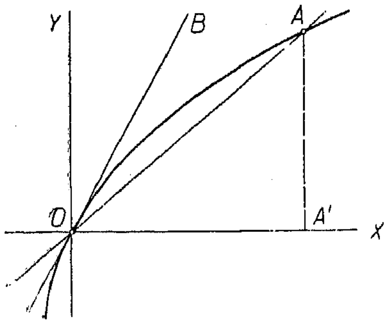
Оказывается, существует так называемое правило Лопиталя, которое дает возможность и в случае получения неопределенных выражений заменить отыскание пределов вычислением формул. Прежде чем перейти к выводу теоремы Лопиталя, условимся в терминологии.

Мы будем рассматривать следующие неопределенные выражения:

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ 1^\infty, \ \infty^0, \ 0^0.$$

„Истинным значением“ функции будем называть предельное значение ее, когда соответствующее частное ее значение принимает неопределенный вид.

„Найти истинное значение функции“ или „раскрыть неопределенность"—это значит вычислить предельное значение ее, когда соответствующее частное ее значение принимает неопределенный вид.



Фиг. 60.

Дадим теперь геометрическое истолкование изложенным рассуждениям.

Пусть кривая OA (фиг. 60) проходит через начало координат O и дана параметрическими уравнениями $y=f(t)$ и $x=\varphi(t)$. Тогда угловой коэффициент $\operatorname{tg}\psi$ хорды OA представится таким образом:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{A'A}{OA'}=\frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

Положим теперь, что точка A, перемещаясь по кривой, стремится совпасть с началом координат; аналитически выразится это тем, что параметр t будет стремиться к некоторому числовому значению a, при котором обе координаты x и y обращаются в нуль: $0=f(a)$ и $0=\varphi(a)$. В пределе секущая OA перейдет в касательную OB, угловой коэффициент которой равен $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ (гл. I, § 4, теорема 5). Так как в пределе угловой коэффициент секущей переходит в угловой коэффициент касательной (гл. I, § 1), то

$$lim_{t\to a}\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{1}$$

Например,

$$lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\left(\frac{\cos t}{1}\right)_{t=0}=1;\quad lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\left(\frac{a^t\ln a}{1}\right)_{t=0}=\ln a;$$

$$lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}=\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}\right)_{t=\infty}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)_{t=\infty}=1;$$

отсюда, так как

$$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),$$

то

$$lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e^1=e.$$

Перейдем теперь к аналитическому исследованию различных типов неопределенных выражений.

§ 2. Неопределенное выражение вида $\frac{0}{0}$.

Пусть мы имеем функцию $F(x)$, которая при $x=a$ принимает неопределенный вид:

$$F(a)=\frac{0}{0}.$$

Для удобства исследования представим ее в форме дроби:

$$F(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ выбраны таким образом, что

$$f(a)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(a)=0.$$

Применим к этим функциям теорему Коши (гл. II, § 3):

$$[f(b)-f(a)]\,\varphi'(c)=[\varphi(b)-\varphi(a)]\,f'(c).$$

Так как $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$, то $f(b)\,\varphi'(c)=\varphi(b)\,f'(c)$ или

$$\frac{f(b)}{\varphi(b)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Положим, что b стремится к a; тогда и c, расположенное в интервале (a, b) (гл. II, § 3), тоже будет стремиться к a, и пропорция в случае существования предела примет такой вид:

$$lim_{\,b\to a}\frac{f(b)}{\varphi(b)}=lim_{\,c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Заменив буквы b и c через x, получаем формулу Лопиталя

$$lim_{\,x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=lim_{\,x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2}$$

Если дробь $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ не принимает в свою очередь неопределенного вида, то можно формулу Лопиталя представить таким образом [сравнить с формулой (1)]:

$$lim_{\,x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Покажем, что формула (2) имеет силу и в том случае, когда $a=\infty$; для этого положим $x=\frac{1}{t}$, откуда $x_t'=-\frac{1}{t^2}$, ясно, что, когда $x\to\infty$, то $t\to 0$; тогда получим

$$lim_{\,x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=lim_{\,t\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=lim_{\,t\to 0}\frac{f'(x)\,x_t'}{\varphi'(x)\,x_t'}=lim_{\,t\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=$$
$$=lim_{\,x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

ПРИМЕР 1.

$$lim_{\,x\to -1}\frac{(x^6-1)\,e^x\sin\frac{\pi x}{2}\ln|x+3|}{(x+1)\operatorname{arc\,tg}x}=$$

$$=lim_{\,x\to -1}\frac{e^x\sin\frac{\pi x}{2}\ln|x+3|}{\operatorname{arc\,tg}x}\cdot lim_{\,x\to -1}\frac{x^6-1}{x+1}=$$

$$=\frac{4\ln 2}{\pi e}\,lim_{\,x\to -1}\frac{6x^5}{1}=-24\frac{\ln 2}{\pi e}.$$

ПРИМЕР 2.

$$lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln|x|}{(x-1)\ln|x|}=lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln|x|+1-\frac{1}{x}};$$

так как выражение, полученное по правилу Лопиталя, принимает в свою очередь неопределенный вид, то применяем это правило вторично и вообще до тех пор, пока не „раскроем неопределенности“:

$$lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln|x|+1-\frac{1}{x}}=lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

следовательно,

$$lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln|x|}{(x-1)\ln|x|}=\frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 3.

$$lim_{x\to 1}\frac{(\ln|x|)^2}{2x-2-2\ln|x|}=\frac{1}{2}\,lim_{x\to 1}\frac{2\ln|x|\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{x-1}=lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

К тому же самому результату можно притти при помощи примера 2:

$$lim_{x\to 1}\frac{(\ln|x|)^2}{2x-2-2\ln|x|}=\frac{1}{2}\,lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln|x|}{x-1-\ln|x|}\,lim_{x\to 1}\frac{(\ln|x|)^2}{(x-1)\ln|x|}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\,lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{x-1}=lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

§ 3. Неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и положим, что $f(a)=\infty$ и $\varphi(a)=\infty$. Покажем, что и в этом случае правило Лопиталя имеет силу. В самом деле,

$$lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}};$$

так как

$$\frac{1}{f(a)}=0 \text{ и } \frac{1}{\varphi(a)}=0,$$

то мы получаем (§ 2):

$$lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}=lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}=lim_{x\to a}\frac{-\frac{1}{f^2(x)}f'(x)}{-\frac{1}{\varphi^2(x)}\varphi'(x)}=$$

$$= lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{\varphi^2(x)}} lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

откуда

$$lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} : lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{\varphi^2(x)}} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

или

$$lim_{x \to a} \left[\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} : \frac{\frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{\varphi^2(x)}} \right] = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \text{ т.-е. } lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Мы совершили деление на

$$lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{\varphi^2(x)}} = lim_{x \to a} \frac{\varphi^2(x)}{f^2(x)} = \left[lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right]^2,$$

а это возможно только тогда, когда $lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ не равно ни бесконечности ни нулю. В первом случае прибавляем к $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ единицу:

$$lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} + 1 = lim_{x \to a} \frac{f(x) + \varphi(x)}{\varphi(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x) + \varphi'(x)}{\varphi'(x)};$$

последнее равенство получается применением правила Лопиталя, что вполне законно, так как

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) + \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

и, следовательно, условия первой части доказательства соблюдены; но

$$lim_{x \to a} \frac{f'(x) + \varphi'(x)}{\varphi'(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + 1,$$

так что

$$lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} + 1 = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + 1,$$

откуда

$$lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

В том случае, если

$$lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0,$$

употребляем тот же самый прием только не относительно $lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, а относительно $lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$.

ПРИМЕР.

$$lim_{x \to 0} \frac{\ln|x|}{\operatorname{ctg} x} = lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{1} = 0.$$

§ 4. Неопределенное выражение вида $0 \cdot \infty$.

Рассмотрим произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и положим, что $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = \infty$. Принимая во внимание равенства

$$lim_{x \to a} [f(x)\, \varphi(x)] = lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ и } lim_{x \to a} [f(x)\, \varphi(x)] = lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

приводим этот случай к неопределенности $\frac{0}{0}$ (§ 2) или $\frac{\infty}{\infty}$ (§ 3).

ПРИМЕР.

$$lim_{x \to 0} [\sin x \cdot \ln|x|].$$

Если представить это выражение в виде

$$lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\ln|x|}},$$

то при дифференцировании степень $\ln|x|$ будет все повышаться и выражение будет усложняться; поэтому преобразуем данный пример таким образом:

$$lim_{x \to 0} (\sin x \cdot \ln|x|) = lim_{x \to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sin x}} = lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} =$$

$$= -lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = -1 \cdot 0 = 0.$$

§ 5. Неопределенное выражение вида $\infty - \infty$.

Рассмотрим разность

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}$$

и положим, что у данных двух функций общий корень a, т.-е.

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]=lim_{x\to a}\frac{f(x)-\varphi(x)}{f(x)\varphi(x)},$$

приводим этот случай к неопределенности $\frac{0}{0}$ (§ 2).

ПРИМЕР.

$$lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln|x|}-\frac{1}{x-1}\right]=lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln|x|}{(x-1)\ln|x|}=\frac{1}{2}$$

(§ 2, пример 2-й).

§ 6. Неопределенные выражения вида 1^∞, ∞^0, 0^0.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)^{f(x)}$ и положим, что

$$1)\ f(a)=\infty,\qquad \varphi(a)=1,$$

или

$$2)\ f(a)=0,\qquad \varphi(a)=\infty,$$

или

$$3)\ f(a)=0,\qquad \varphi(a)=0.$$

Логарифмируем эту функцию: $f(x)\ln|\varphi(x)|$; тогда во всех трех случаях получим неопределенное выражение вида $0\cdot\infty$ (§ 4), так как

$$\begin{aligned}&1)\ f(a)=\infty, && \ln|\varphi(a)|=0,\\ &2)\ f(a)=0, && \ln|\varphi(a)|=\infty,\\ &3)\ f(a)=0, && \ln|\varphi(a)|=-\infty.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.

$lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}=e$, так как $lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{x-1}=1$ (см. § 2, пример 3).

ПРИМЕР 2.

$$lim_{x\to\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{x-\pi}=e^0=1,$$

так как

$$lim_{x\to\pi}\frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\frac{1}{x-\pi}}=-lim_{x\to\pi}\frac{\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\frac{1}{x-\pi}}=$$

$$=-lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{(x-\pi)^2}}=-\frac{1}{2}lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{\cos\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}lim_{x\to\pi}\frac{2(x-\pi)}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=0.$$

ПРИМЕР 3.

$lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg}x}=1$, так как $lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}x\ln|x|)=0$ (§ 3, пример).

§ 7. Вычисление предельного значения функции при помощи разложения по формуле Тэлора.

Для вычисления предельного значения функции в некоторых случаях является более удобным пользоваться ее разложением по формуле Тэлора. Поясним сказанное примером.

Найти

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - \frac{x^9}{362880}}{x^{15} - 2x^{13} + 0{,}01x^{11}}.$$

Разложим $\sin x$ по формуле Маклорена [гл. II, § 4, формула (5)], взяв остаточный член в форме Лагранжа и положив $n = 11$:

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1} + x^2\frac{f''(0)}{1\cdot 2} + \ldots + x^{10}\frac{f^{(10)}(0)}{10!} + x^{11}\frac{f^{(11)}(\vartheta x)}{11!}.$$

Так как в этом случае $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (гл. I, § 6), то

$$f(0) = \sin(0) = 0, \quad f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad f''(0) = \sin\pi = 0,$$

$$f'''(0) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \ldots\ldots, \quad f^{(10)}(0) = \sin 5\pi = 0,$$

$$f^{(11)}(\vartheta x) = \sin\left(\vartheta x + \frac{11\pi}{2}\right) = -\cos(\vartheta x);$$

таким образом,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{11}\cos(\vartheta x)}{11!}.$$

На основании этого

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - \frac{x^9}{362880}}{x^{15} - 2x^{13} + 0{,}01x^{11}} =$$

$$= -\frac{1}{11!}\,lim_{x\to 0}\frac{x^{11}\cos(\vartheta x)}{x^{11}(x^4 - 2x^2 + 0{,}01)} = -\frac{1}{11!}\,lim_{x\to 0}\frac{\cos(\vartheta x)}{x^4 - 2x^2 + 0{,}01} =$$

$$= -\frac{1}{399168}.$$

ГЛАВА V.

Разложение функций по формуле Тэлора.

Рассмотрим ряд примеров на разложение функций по формуле Тэлора.

§ 1. Целая рациональная функция.

Применим прежде всего формулу Тэлора (с остаточным членом в форме Лагранжа)

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\vartheta(x-a)] \qquad \text{(T)}$$

к многочлену

$$f(x)=a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_{p-1}x+a_p \quad \text{или} \quad f(x)=\sum_{k=0}^{k=p}a_{p-k}x^k.$$

Так как

$$f^{(l)}(x)=\sum_{k=l}^{k=p}k(k-1)\cdots(k-l+1)\,a_{p-k}x^{k-l},$$

то получаем

$$\sum_{k=0}^{k=p}a_{p-k}x^k=\sum_{k=0}^{k=p}a_{p-k}a^k+(x-a)\sum_{k=1}^{k=p}ka_{p-k}a^{k-1}+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\sum_{k=2}^{k=p}k(k-1)a_{p-k}a^{k-2}+$$
$$+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{k=p}k(k-1)\cdots(k-n+2)\,a_{p-k}a^{k-n+1}+$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}\sum_{k=n}^{k=p}k(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_{p-k}[a+\vartheta(x-a)]^{k-n}, \qquad (1)$$

где $n<p$. Если положить $n=p+1$, то остаточный член равен нулю, так как $f^{(p+1)}(x)=0$, и полученное выражение принимает такой вид:

$$\sum_{k=0}^{k=p}a_{p-k}x^k=\sum_{k=0}^{k=p}a_{p-k}a^k+(x-a)\sum_{k=1}^{k=p}ka_{p-k}a^{k-1}+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\sum_{k=2}^{k=p}k(k-1)\,a_{p-k}a^{k-2}+$$
$$+\cdots+\frac{(x-a)^p}{p!}p!\,a_0.$$

Например, полагая $p=2$, $n=1$ в первой формуле (1) и $p=2$ во второй, получаем

$$a_0x^2+a_1x+a_2=(a_0a^2+a_1a+a_2)+(x-a)\{2a_0[a+\vartheta(x-a)]+a_1\}$$

и

$$a_0x^2+a_1x+a_2=(a_0a^2+a_1a+a_2)+(x-a)(2a_0a+a_1)+a_0(x-a)^2.$$

В частности, если положим $a=0$, т.-е. если возьмем формулу Маклорена (с остаточным членом в форме Лагранжа),

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x), \qquad (M)$$

то получим

$$\sum_{k=0}^{k=p} a_{p-k}x^k=a_p+x\,a_{p-1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}\,2\cdot 1\cdot a_{p-2}+\cdots+\frac{x^p}{p!}p!\,a_0,$$

т.-е. известное из элементарной алгебры разложение многочлена по степеням аргумента представляет собою разложение его по формуле Маклорена при условии, что номер остаточного члена взят достаточно большим, так что последний равен тождественно нулю.

§ 2. Показательная функция.

Разложим по формуле Маклорена (M) показательную функцию $f(x)=e^x$. Так как $f^{(l)}(x)=e^x$ (гл. I, § 6, пример 4) и $f^{(l)}(0)=1$, то

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}. \qquad (2)$$

Таким образом трансцендентная функция e^x **приближенно** может быть представлена многочленом

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

причем **ошибка** будет оцениваться остаточным членом $\frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}$.

Положим в разложении (2) $x=1$:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\vartheta}}{n!}.$$

Так как $\vartheta<1$, то $e<e<3$ (часть 1-я, § 2); следовательно, остаточный член $\frac{e^{\vartheta}}{n!}<\frac{3}{n!}$ или $\frac{e^{\vartheta}}{n!}=\frac{3\vartheta_n}{n!}$, где $0<\vartheta_n<1$. Полагая последовательно $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots,$ получаем:

$$e=2\,{}^{1}/_{2}+\frac{\vartheta_3}{2}, \quad e=2\,{}^{2}/_{3}+\frac{\vartheta_4}{8}, \quad e=2\,{}^{17}/_{24}+\frac{\vartheta_5}{40}, \quad e=2\,{}^{43}/_{60}+\frac{\vartheta_6}{240},$$

$$e=2\,{}^{517}/_{720}+\frac{\vartheta_7}{1680}, \quad e=2\,{}^{181}/_{252}+\frac{\vartheta_8}{13440}, \quad e=2\,{}^{28961}/_{40320}+\frac{\vartheta_9}{120960},$$

$$e = 2\,{}^{26063}/_{36288} + \frac{\vartheta_{10}}{1209600}, \ldots,$$

так что числа 2,5, 2,6, 2,70, 2,71, 2,718, 2,7182, 2,71828, 2,718281,... отличаются от e на величины, соответственно меньшие

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{40}, \frac{1}{240}, \frac{1}{1680}, \frac{1}{13440}, \frac{1}{120960}, \frac{1}{1209600}, \ldots$$

§ 3. Тригонометрическая функция косинус.

В этом случае

$$f^{(l)}(x) = \cos\left(x + l\frac{\pi}{2}\right)$$

(гл. I, § 6, пример 6) и, следовательно, при $l = 2k+1$, т.-е. нечетном,

$$f^{(2k+1)}(0) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

а при $l = 2k$, т.-е. четном,

$$f^{(2k)}(0) = \cos k\pi = (-1)^k, \quad f^{(2k)}(\vartheta x) = \cos(\vartheta x + k\pi) = (-1)^k \cos(\vartheta x).$$

Таким образом, формула Маклорена (М) примет такой вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + (-1)^k \frac{x^{2k}\cos(\vartheta x)}{(2k)!}. \tag{3}$$

При $k = 2$ получаем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(\vartheta x),$$

т.-е. с ошибкой, меньшей $\frac{x^4}{24}$, можно заменить $\cos x$ двучленом $1 - \frac{x^2}{2}$.

§ 4. Тригонометрическая функция синус.

На основании только что изложенных соображений, а также вычислений, проведенных в § 7 гл. IV, получаем для синуса разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}\cos(\vartheta x)}{(2k+1!)}. \tag{4}$$

Положим $k = 2$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos(\vartheta x),$$

т.-с. с ошибкой, меньшей $\frac{|x|^5}{120}$, можно заменить $\sin x$ двучленом $x - \frac{x^3}{6}$.

§ 5. Логарифмическая функция.

Функцию $\ln|x|$ нельзя разложить по формуле Маклорена (М), так как она и ее производные при $x=0$ обращаются в ∞. Поэтому возьмем функцию $f(x)=\ln|1+x|$. Так как в этом случае

$$f^{(l)}(x)=(-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{(1+x)^l}$$

(гл. I, § 6, пример 3),

$$f(x)=0,\ f^{(l)}(0)=(-1)^{l-1}(l-1)!$$

и

$$\frac{f^{(l)}(0)}{l!}=\frac{(-1)^{l-1}}{l},$$

то

$$\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+ \\ +(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\vartheta x)^n}. \tag{5}$$

Так как -1 является точкой разрыва функции $\ln|1+x|$ и ее производных, то следует полагать $x>-1$. Так как x^n входит в числитель остаточного члена, то, чтобы последний убывал достаточно быстро, следует положить вообще, что $1>x>-1$, т.-е. $|x|<1$. Поэтому, например, при $x=1$ получаем крайне неудобную для вычисления формулу:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(1+\vartheta)^n}.$$

В самом деле, чтобы найти $\ln 2$ с точностью до 0,01, надо взять 100 членов, так как $\frac{1}{n(1+\vartheta)^n}<0{,}01$ при $n\geqslant 100$.

Ввиду этого несколько преобразуют полученную для $\ln|1+x$ формулу (5); заменим в ней x через $-x$:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{x^n}{n(1-\vartheta_1 x)^n};$$

затем произведем вычитание логарифмов и положим $n=2k+1$:

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right]+ \\ +\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\left[\frac{1}{(1+\vartheta x)^{2k+1}}+\frac{1}{(1-\vartheta_1 x)^{2k+1}}\right].$$

Положим $x=\frac{1}{2N+1}$ и, следовательно,

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{2N+1+1}{2N+1-1}=\frac{N+1}{N};$$

тогда

$$\ln\left|\frac{N+1}{N}\right|=\ln|N+1|-\ln|N|=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\frac{1}{5(2N+1)^5}+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2N+1)^{2k-1}}\right]+R_k,$$

где R_k — остаточный член.

На основании этой формулы, зная один из логарифмов $\ln|N|$ или $\ln|N+1|$, найдем другой и с тем большим удобством, чем больше N.

При $N=1$ получим

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right]+R_k;$$

уже первые два члена

$$2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{81}\right]$$

дают 0,69, т.-е. $\ln 2$ с точностью до 0,01.

Чтобы перейти от натурального логарифма к соответствующему обыкновенному, надо, как известно из элементарной алгебры, первый помножить на $\frac{1}{\ln 10}=lg_{10}\,e=0{,}434\ldots$, так что $lg_{10}\,2=0{,}69\cdot 0{,}43=0{,}30$.

§ 6. Степень бинома (двучлена).

Степенную функцию x^a, вообще говоря, разлагать по формуле Маклорена нельзя, так как при отрицательном показателе a функция и все ее производные обращаются при $x=0$ в ∞, а при положительном и нецелом показателе то же обстоятельство имеет место, начиная с производной некоторого порядка; если в последнем случае ограничиться производными, обращающимися в нуль, то все разложение сведется к остаточному члену, который совпадет с x^a; то же будет при a целом и положительном. Поэтому разложим по формуле Маклорена (M) степень двучлена $1+x$, т.-е. положим

$$f(x)=(1+x)^a.$$

Так как в этом случае

$$f^{(l)}(x)=a(a-1)(a-2)\ldots(a-l+1)(1+x)^{a-l}$$

(гл. I, § 6, пример 2) и

$$f(0)=1,\quad f^{(l)}(0)=a(a-1)\ldots(a-l+1),$$

то

$$(1+x)^a = 1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n(1+\vartheta x)^{a-n}. \quad (6)$$

При a целом и положительном остаточный член не обращается в нуль, пока $n \leq a$; при $n > a$ он равен нулю. Таким образом, при $n \leqslant a$ мы получаем известную из элементарной алгебры формулу бинома Ньютона для целого и положительного показателя a:

$$(1+x)^a = 1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+x^a.$$

Так как в общем случае какого угодно показателя a каждая производная, порядок которой l удовлетворяет неравенству $a-l<0$ (в частности и сама функция), обращается в ∞ при $x=-1$, то x должно быть больше -1. Так как остаточный член содержит множителем x^n, то удобнее давать x вообще такие значения, чтобы $|x|<1$.

Полагая в равенстве (6) $a=\frac{1}{2}$, мы получим формулу для квадратного корня:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots+$$
$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}x^{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n(1+\vartheta x)^{\frac{1}{2}-n}$$

При $n=2$ эта формула принимает вид:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+\vartheta x)^{3/2}},$$

т.-е. с ошибкой, равной

$$-\frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+\vartheta x)^{3/2}},$$

мы можем заменить $\sqrt{1+x}$ через $1+\frac{1}{2}x$; например,

$$\sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-0{,}01},$$

заменяем через $\frac{10}{3}(1-0{,}005)$, т.-е. через 3,3166, с ошибкой, меньшей 0,000042, так как модуль остатка

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{0{,}01^2}{(1+0{,}01\vartheta)^{3/2}}$$

меньше $\frac{10}{3}\cdot 0{,}0000125$, т.-е. 0,000042.

Полагая в равенстве (6) $a = -1$, получим формулу геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}}. \tag{7}$$

Как известно из элементарной алгебры, остаточный член можно представить проще в виде

$$(-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

§ 7. Понятие о ряде Тэлора.

Как известно из элементарной алгебры, остаточный член в разложении (7) стремится к нулю, если

$$n \to \infty \quad \text{и} \quad |x| < 1;$$

тогда получается геометрический (бесконечный) ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\cdots \tag{7'}$$

В части седьмой (§ 6) будет показано, что при тех же условиях получаются из формул (6) и (5) (бесконечные) ряды:

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots\cdots, \tag{6'}$$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots, \tag{5'}$$

а из формул (4), (3) и (2) при каких-угодно значениях x соответствующие (бесконечные) ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots, \tag{4'}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots, \tag{3'}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \tag{2'}$$

Вообще формулы Тэлора (Т) и Маклорена (М) при условии, что $n \to \infty$ остаточный член стремится к нулю, переходят в (бесконечный) ряд Тэлора

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots\cdots \tag{T'}$$

и в (бесконечный) ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+$$
$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots \qquad (M')$$

Таким образом, формула Тэлора (Маклорена) и ряд Тэлора (Маклорена) служат для двух разных целей. Если нужно найти числовое значение функции, то берут несколько членов формулы Тэлора с тем расчетом, чтобы получилась требуемая в данном случае степень точности, т.-е., чтобы остаточный член был достаточно мал. Если же нужно функцию представить аналитически при помощи (бесконечного) ряда, который был бы ей равнозначащ для некоторых значений аргумента, то пользуются рядом Тэлора. При каких условиях можно пользоваться рядом Тэлора, будет показано в части седьмой (§ 5).

ГЛАВА VI.

Дифференциал.

§ 1. Бесконечно малые различных порядков.

Пусть дана бесконечно малая величина α, значения которой составляют последовательность

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots\ldots$$

Тогда переменная $\beta=7\alpha^2$ тоже будет бесконечно малой, так как ее значения составят стремящуюся к нулю последовательность

$$7,\ \frac{7}{16},\ \frac{7}{81},\ \frac{7}{256},\ \frac{7}{625},\ldots,\ \frac{7}{n^4},\ldots\ldots;$$

точно так же бесконечно малой будет переменная $\gamma=\sqrt{\alpha}$ ввиду того, что ее значения составляют последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots\ldots$$

Следовательно, мы имеем три бесконечно малых величины α, β, γ; все они стремятся к нулю, но только с различной быстротой. Так, в данном случае γ стремится к нулю медленнее, а β быстрее других. Для характеристики быстроты изменения бесконечно малой величины вводится понятие о порядке ее: γ будет бесконечно малой величиной низшего порядка, чем α, а β — высшего; точнее, если принять α за бесконечно малую первого порядка или, как говорят, за главную бесконечно малую, то β будет второго, а γ порядка $\frac{1}{2}$. Принимая во внимание, что $lim\,\frac{\beta}{\alpha^2}=7$ и $lim\,\frac{\gamma}{\alpha^{1/2}}=1$, мы можем сказать вообще, что переменная величина δ — бесконечно малая порядка n, если $lim\,\frac{\delta}{\alpha^n}=g$, где g не равно ни нулю ни бесконечности. Если $g=0$, то δ — бесконечно малая порядка выше, чем n; например, рассматриваемая выше переменная β порядка выше первого, так как $lim\frac{\beta}{\alpha}=0$. Если $g=\infty$, то δ — бесконечно малая низшего порядка, чем n; например, рассматриваемая выше переменная γ порядка ниже первого, так как $lim\frac{\gamma}{\alpha}=\infty$,

На основании определения предела из равенства $lim\frac{\delta}{\alpha^n}=g$ получаем $\frac{\delta}{\alpha^n}=g+\varepsilon$, где ε — бесконечно малая, откуда $\delta=g\alpha^n+\varepsilon\alpha^n$. Следовательно, бесконечно малая величина δ распадается на два слагаемых: первое, $g\alpha^n$, называется главной частью бесконечно малой δ, а число g — коэффициентом главной части; порядок главной части $g\alpha^n$ совпадает с порядком бесконечно малой δ, а порядок второго слагаемого $\varepsilon\alpha^n$ выше порядка δ.

ПРИМЕР 1. Мы видели, что

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

следовательно, синус бесконечно малой дуги того же порядка, что и сама дуга, причем главные их части одинаковы.

ПРИМЕР 2. Так как

$$lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то относительно тангенса приходится сделать то же замечание, что и относительно синуса.

ПРИМЕР 3. Так как

$$lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{x-1}=1$$

(гл. IV, § 2, пример 3), то $\ln|x|$ и двучлен $x-1$ при $x\to 1$ бесконечно малые одного и того же порядка.

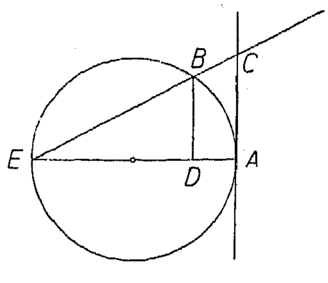
ПРИМЕР 4. Так как

$$lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{\ln|x|}}=0$$

(гл. IV, § 3, пример), то $\frac{1}{\ln|x|}$ при $x\to 0$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем $\operatorname{tg}x$, и, следовательно (пример 2), более низкого порядка, чем x.

ПРИМЕР 5. Выяснить, как стремятся к нулю прямолинейные отрезки AC, DB, BC, DA и дуга AB круга ABE (фиг. 61), когда точка B

неограниченно приближается к точке A. Приемем дугу AB за главную бесконечно малую величину; тогда отрезки DB и AC (см. примеры 1 и 2) будут бесконечно малыми 1-го порядка, у которых коэффициенты главных частей равны единице. Так как $BC=\frac{1}{EC}AC^2$ и $DA=\frac{1}{ED}DB^2$, где EC и ED стремятся к диаметру d, то BC и DA — бесконечно малые второго порядка, у которых коэффициенты главных частей равны $\frac{1}{d}$.



Фиг. 61.

В заключение докажем **теорему:** предел отношения двух бесконечно малых одного и того же порядка равен частному от деления главной части делимого на главную часть делителя.

Пусть бесконечно малые β и γ одного и того же порядка n относительно третьей бесконечно малой α и пусть b и c—коэффициенты их главных частей, так что

$$\beta = b\alpha^n + \delta\alpha^n,\ \gamma = c\alpha^n + \varepsilon\alpha^n,$$

где δ и ε — бесконечно малые. Тогда

$$lim\frac{\beta}{\gamma} = lim\frac{b\alpha^n + \delta\alpha^n}{c\alpha^n + \varepsilon\alpha^n} = lim\ \frac{b+\delta}{c+\varepsilon} = \frac{b}{c} = \frac{b\alpha^n}{c\alpha^n}.$$

Отсюда вытекает СЛЕДСТВИЕ: предел отношения двух бесконечно малых одного и того же порядка не изменится, если их изменить на бесконечно малые высших порядков.

В самом деле, в этом случае главные части данных двух бесконечно малых не меняются.

ПРИМЕР.

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}}{x - x^2 + x^3} = lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = lim\frac{x}{x} = 1.$$

Замена $\sin x$ через x основывается на том соображении, что предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если их заменить бесконечно малыми соответственно тех же порядков и с теми же главными частями.

Например,

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{arc}\sin x} = lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2.$$

§ 2. Основные понятия, связанные с дифференциалом; геометрическое значение его.

Пусть дана функция $y=f(x)$; из определения производной и предела вытекает, что $f'(x)$ отличается от отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на величину бесконечно малую, например, β, т.-е., так как

$$f'(x)=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\beta,$$

откуда

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\beta\Delta x;$$

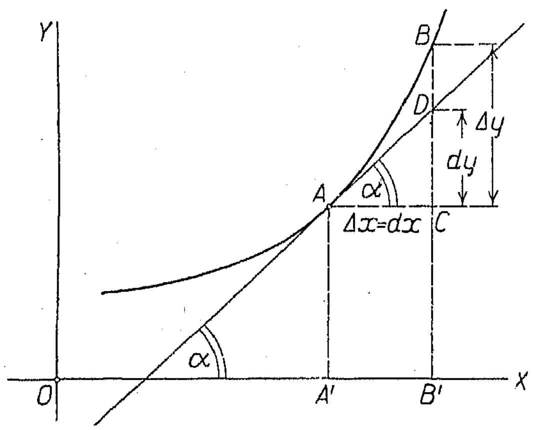
приращение Δy функции, соответствующее приращению независимого переменного Δx, есть бесконечно малое одновременно с Δx. Принимая Δx за главное бесконечно малое, мы на основании равенства

$$lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

видим, что Δy тоже первого порядка (§ 1), за исключением тех случаев, когда $f'(x)$ обращается в нуль или бесконечность, главная часть бесконечно малой Δy равна, следовательно, $f'(x)\Delta x$. Это произведение и называется дифференциалом и обозначается через $df(x)$ или dy, так что

$$\Delta y=dy+\beta\Delta x \quad \text{и} \quad dy=f'(x)\Delta x.$$

Таким образом, *дифференциалом* (*первого порядка*) *функции называется произведение ее производной на приращение независимого переменного.*



Фиг. 62.

Из предыдущего вытекает, что *дифференциал функции служит главной частью приращения функции* и что, следовательно, *дифференциал функции и приращение функции не равны между собой.*

Выясним геометрический смысл дифференциала. Для этого возьмем на кривой AB (фиг. 62), служащей графикой функции $y=f(x)$, точки $A(x, y)$ и $B(x+\Delta x, \ y+\Delta y)$, так что

$$A'B'=AC=\Delta x \text{ и } CB=\Delta y.$$

Из прямоугольного треугольника ADC получаем:

$$CD = AC \operatorname{tg} CAD$$

или

$$CD = \Delta x \operatorname{tg} \alpha,$$

т.-е.

$$CD = f'(x)\,\Delta x.$$

Сопоставляя равенства

$$CD = f'(x)\,\Delta x \text{ и } dy = f'(x)\,\Delta x,$$

а также

$$CB = CD + DB \text{ и } \Delta y = dy + \beta \Delta x,$$

заключаем, что

$$CD = dy,\ DB = \beta \Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции изображается геометрически приращением ординаты точки, движущейся по касательной, между тем как приращение функции изображается приращением ординаты точки, движущейся по кривой.

§ 3. Основные теоремы и формулы.

Теорема 1. Дифференциал постоянного равен нулю.

В самом деле,

$$d(c) = (c)'\,\Delta x = 0,$$

так как $(c)' = 0$ (гл. I, § 4, теорема 1).

Обратная теорема. Если дифференциал в некотором интервале равен нулю, то функция в этом интервале постоянна.

Так как $dc = 0$, то $(c)'\,\Delta x = 0$ или, по сокращении на Δx, $(c)' = 0$; но в этом случае функция постоянна (гл. II, § 5, теорема 1).

Теорема 2. Дифференциал независимого переменного равен его приращению.

В самом деле,

$$dx = (x)_x'\,\Delta x = \Delta x,$$

так как $(x)_x' = 1$ (гл. I, § 4, теорема 2).

Теорема 3. Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента все равно, будет ли аргумент независимым или зависимым переменным.

Если x—независимое переменное, то $dx = \Delta x$ (теорема 2) и, следовательно,

$$dy = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx;$$

если же x—функция другого переменного t, т.-е. $x = \varphi(t)$, то по теореме о производной сложной функции (гл. I, § 4, теорема 3)

$$dy = f'(x)\,\varphi'(t)\,\Delta t;$$

по определению же дифференциала,

$$\varphi'(t)\,\Delta t = dx,$$

так что и в этом случае

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Вообще, если

$$y = f(x),\ x = \varphi(t),\ t = \psi(u), \ldots, z = F(w),$$

то производная сложной функции представится таким образом (гл. I, § 4, теорема 3):

$$y_w' = f'(x)\,\varphi'(t)\,\psi'(u) \cdots F'(w),$$

а дифференциал попрежнему

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Деля последнее равенство на dx, получаем **теорему 4:** производная равна частному от деления дифференциала функции на дифференциал аргумента все равно, будет ли аргумент независимым или зависимым переменным.

Теорема 5. Дифференциал алгебраической суммы равен таковой же сумме дифференциалов от слагаемых.

В самом деле:

$$d(u - v + \ldots + w) = (u - v + \ldots + w)'dx = (u' - v' + \ldots + w')dx =$$
$$= u'dx - v'dx + \ldots + w'dx = du - dv + \ldots + dw$$

(гл. I, § 4, т. 6). Тот же результат получаем непосредственно из равенства

$$\Delta(u - v + \ldots + w) = \Delta u - \Delta v + \ldots + \Delta w$$

ввиду того, что если бесконечно малые равны, то и главные части их равны.

Теорема 6. Дифференциалы двух функций, разнящихся на постоянное, равны между собой.

В самом деле,

$$d(u + c) = (u + c)'dx = u'dx = du$$

(гл. I, § 4, теорема 7).

Обратная теорема. Если дифференциалы двух функций в некотором интервале равны между собой, то функции в этом интервале могут разниться только на постоянное.

В самом деле, если $du = dv$, т.-е. если $u'\Delta x = v'\Delta x$ или $u' = v'$, то функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ могут разниться только на постоянное (гл. II, § 5, теорема 2).

Теорема 7. Дифференциал произведения равен сумме произведений, которые получаются путем умножения дифференциала каждого множителя на остальные сомножители.

В самом деле,

$$d(uv\,..\,w) = (uv\,..\,w)'\Delta x = (u'v\,..\,w + uv'\,..\,w + \ldots\ldots + uv\,..\,w')\,\Delta x =$$
$$= u'v\,..\,w\Delta x + uv'\,..\,w\Delta x + \ldots\ldots + uv\,..\,w'\Delta x =$$
$$v\,..\,w\,du + u\,..\,w\,dv\ldots\ldots + uv\ldots dw$$

(гл. I, § 4, теорема 8). Делим обе части полученного равенства на произведение $uv\ldots.w$:

$$\frac{d(uv\ldots.w)}{uv\ldots.w} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \ldots\ldots + \frac{dw}{w}.$$

Теорема 8. Постоянный множитель можно вносить под знак дифференциала и выносить из-под него.

В самом деле,

$$d(cu) = (cu)'\Delta x = cu'\Delta x = c\,du$$

(гл. I, § 4, теорема 9).

Теорема 9. Дифференциал дроби равен дроби, у которой знаменателем служит квадрат знаменателя, а числителем—разность; уменьшаемое этой разности равно произведению знамененателя на дифференциал числителя, а вычитаемое—произведению числителя на дифференциал знаменателя.

В самом деле,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'\Delta x = \frac{vu'\Delta x - uv\Delta x}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

(гл. I, § 4, теорема 10).

Теоремы эти можно сопровождать геометрическим истолкованием, как мы это делали для соответствующих теорем о производных (гл. I, § 4).

§ 4. Дифференциалы основных элементарных функций.

Так как для функции $y = f(x)$ (§ 3, т. 3) $dy = f'(x)\,dx$, то (гл. I, § 5) дифференциалы основных элементарных функций представятся следующей таблицей формул, причем аргумент x может быть зависимым и независимым переменным:

1) $da^x = a^x \ln a\,dx$, 1') $de^x = e^x dx$,

2) $d\lg_a|x| = \dfrac{dx}{x\ln a}$, 2') $d\ln|x| = \dfrac{dx}{x}$,

3) $dx^a = ax^{a-1}\,dx$,

4) $d\sin x = \cos x\,dx$,

5) $d\cos x = -\sin x\,dx$,

6) $d\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$,

$$7)\ d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$8)\ d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$9)\ d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$10)\ d(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$11)\ d(\mathrm{arcctg}\,x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§ 5. Дифференциалы высших порядков.

Пусть дана функция $y=f(x)$; дифференциал ее первого порядка

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

есть тоже функция независимой переменной x и, следовательно, у него может быть тоже дифференциал; этот дифференциал, т.-е. дифференциал от дифференциала первого порядка, называется дифференциалом второго порядка и обозначается таким образом: d^2y; следовательно,

$$d^2y = d(dy).$$

Так как

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

то

$$d^2y = d[f'(x)\Delta x];$$

ввиду того, что приращение Δx не зависит от x,

$$d^2y = \Delta x\, d f'(x)$$

(§ 3, теорема 8). Наконец, согласно определению дифференциала (§ 2),

$$df'(x) = f''(x)\,\Delta x$$

и, следовательно,

$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2,$$

где

$$\Delta x^2 = (\Delta x)^2.$$

Повторяя то же рассуждение, мы получим дифференциал третьего порядка

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)\,\Delta x^2] = f'''(x)\,\Delta x^3$$

и т. д. Вообще дифференциал n-го порядка d^ny удовлетворяет равенству

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,\Delta x^n.$$

Это равенство может быть представлено в таком виде

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

ввиду того, что дифференциал независимого переменного равен его приращению (§ 3, теорема 2). Отсюда производная порядка n может быть представлена в виде частного дифференциалов

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$$

при условии, что аргумент x — независимое переменное.

Совершенно иной вид примут выражения дифференциалов высших порядков в том случае, если аргумент x—зависимое переменное: $x=\varphi(t)$. Тогда дифференциал первого порядка, как и раньше, изображается формулой

$$dy=f'(x)\,dx$$

(§ 3, теорема 3), но dx уже не равно Δx (§ 2), а служит функцией t:

$$dx=\varphi'(t)\,dt,$$

так что (§ 3, теорема 7)

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)\,dx]=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x.$$

Выражения дифференциалов третьего и более высоких порядков будут еще более сложны и получатся тем же путем, что и d^2y при помощи формул дифференциалов суммы и произведения.

Так как дифференциалы независимого переменного, за исключением дифференциала первого порядка, равны нулю:

$$d^2x=d(dx)=d(\Delta x)=0,\quad d^3x=d(d^2x)=d0=0$$

и т. д., то формулы

$$d^2y=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x,\quad d^3y=f'''(x)\,dx^3+3f''(x)\,dx\,d^2x+f'(x)\,d^3x$$

и т. д. в этом случае перейдут в более простые, полученные раньше:

$$d^2y=f''(x)\,dx^2,\quad d^3y=f'''(x)\,dx^3 \text{ и т. д.}$$

§ 6. Преимущества пользования дифференциалом.

Введение дифференциалов дает возможность смотреть на символ Лейбница с двух точек зрения: как на символ производной

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}y,\quad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}y$$

и как на отношение дифференциалов

$$\frac{dy}{dx}=dy:dx,\quad \frac{d^n y}{dx^n}=d^n y:dx^n,$$

причем в случае первой производной аргумент x может быть зависимым и независимым переменным; для производных же высших порядков x должно быть независимым переменным.

Мы видели, какие удобства представляет пользование дифференциалом (§ 3, теоремы 3 и 4). Это же обстоятельство выяснится в интегральном исчислении, а также при решении вопроса, который мы разбираем в следующем параграфе.

§ 7. Замена переменных.

1. Пусть дана функция $y=f(x)$; найдем ее производные в предположении, что $x=\varphi(t)$. Мы видели (§ 6), что в этом случае

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

но

$$f''(x)\neq\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Ввиду того, что

$$f''(x)=\frac{dy'}{dx} \quad \text{и} \quad dy'=d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^2}$$

(§ 3, теорема 9), получаем

$$f''(x)=\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^3}.$$

Аналогично при помощи дифференциалов получим выражения третьей и высших производных:

$$f'''(x)=\frac{dy''}{dx},$$

$$dy''=d\,\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^3}=$$

$$=\frac{d^2x\,d^2y+dx\,d^3y-d^2x\,d^2y-d^3x\,dy}{dx^3}-3\,\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^4}\,d^2x=$$

$$=\frac{dx^2\,d^3y-d^3x\,dx\,dy-3\,d^2x\,dx\,d^2y+3\,(d^2x)^2dy}{dx^4},$$

откуда

$$f''(x)=\frac{dx^2\,d^3y-d^3x\,dx\,dy-3\,d^2x\,dx\,d^2y+3(d^2x)^2dy}{dx^5}$$

и т. д.

ПРИМЕР. Преобразовать выражение так называемого радиуса кривизны

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},$$

полагая $x=\varphi(t)$, т.-е. аргумент x зависимое переменное.

Подставляем полученные выше выражения y' и y'':

$$R=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{dx^3}}$$

или

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

II. Пусть x и $y = f(x)$ суть функции одного и того же параметра t, так что

$$x = \varphi(t), \qquad y = f[\varphi(t)] = \psi(t).$$

Найдем выражения производных $f'(x)$, $f''(x)$ и т. д., пользуясь выведенными раньше формулами (случай I):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(ср. гл. I, § 4, теорема 5),

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - d^2x\,dy}{dx^3} = \frac{\varphi'(t)\,dt\,\psi''(t)\,dt^2 - \varphi''(t)\,dt^2\,\psi'(t)\,dt}{\varphi'^3(t)\,dt^3} =$$
$$= \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

и т. д.

ПРИМЕР. Преобразовать выражение радиуса кривизны

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

полагая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, т.-е. полагая, что кривая дана параметрическими уравнениями.

Пользуясь полученными выражениями y' и y'', имеем

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}}$$

или

$$R = \frac{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)}.$$

К тому же результату можем притти, пользуясь выражением R, полученным в примере случая I, и принимая во внимание, что

$$dx = \varphi'(t)dt, \;\; d^2(x) = \varphi''(t)dt^2, \;\; dy = \psi'(t)dt, \;\; d^2y = \psi''(t)dt^2.$$

III. Пусть дана функция $y = f(x)$. Найдем ее производные в предположении, что x и y — функции новых независимых переменных, например, φ и ϱ.

Возьмем частный пример — именно случай перехода от декартовых координат к полярным: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. Тогда

$$dx = \cos\varphi\,d\varrho - \varrho\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\,d\varrho + \varrho\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$d^2x = \cos\varphi\,d^2\varrho - 2\sin\varphi\,d\varrho\,d\varphi - \varrho\cos\varphi\,d\varphi^2 - \varrho\sin\varphi\,d^2\varphi,$$
$$d^2y = \sin\varphi\,d^2\varrho + 2\cos\varphi\,d\varrho\,d\varphi - \varrho\sin\varphi\,d\varphi^2 + \varrho\cos\varphi\,d^2\varphi$$

и т. д.

ПРИМЕР 1. Найти выражение квадрата так называемого дифференциала дуги $ds^2 = dx^2 + dy^2$ в полярных координатах:

$$ds^2 = (\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi)^2 + (\sin\varphi\, d\varrho + \varrho\cos\varphi\, d\varphi)^2 = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varrho^2 + \\ + (-2\varrho\cos\varphi\sin\varphi + 2\varrho\sin\varphi\cos\varphi)\, d\varrho\, d\varphi + \varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi^2 = \\ = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

ПРИМЕР 2. Найти выражение радиуса кривизны

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y - d^2x\, dy}$$

в полярных координатах.

Так как $dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2$ (пример 1), то остается найти выражение знаменателя:

$$dx\, d^2y - d^2x\, dy = (\cos\varphi\, d\varrho - \varrho\sin\varphi\, d\varphi)(\sin\varphi\, d^2\varrho + \\ + 2\cos\varphi\, d\varrho\, d\varphi - \varrho\sin\varphi\, d\varphi^2 + \varrho\cos\varphi\, d^2\varphi) - (\sin\varphi\, d\varrho + \\ + \varrho\cos\varphi\, d\varphi)(\cos\varphi\, d^2\varrho - 2\sin\varphi\, d\varrho\, d\varphi - \varrho\cos\varphi\, d\varphi^2 - \varrho\sin\varphi\, d^2\varphi).$$

Чтобы упростить вычисления, выберем независимое переменное, приняв, например, за него φ; тогда $d^2\varphi = 0$ и

$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = (\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\, d\varrho\, d^2\varrho + \\ + 2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varrho^2 d\varphi + \varrho(-\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\, d\varrho\, d\varphi^2 + \\ + \varrho(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\, d\varphi\, d^2\varrho + 2\varrho(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\, d\varrho\, d\varphi + \\ + \varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi^3 = 2\, d\varrho^2 d\varphi - \varrho\, d\varphi\, d^2\varrho + \varrho^2 d\varphi^3.$$

Таким образом,

$$R = \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2)^{3/2}}{\varrho^2 d\varphi^3 + 2\, d\varrho^2 d\varphi - \varrho\, d\varphi\, d^2\varrho}.$$

Тот же самый радиус кривизны можно выразить не через дифференциалы, а через производные, так как

$$d\varrho = \varrho' d\varphi\,, \quad d^2\varrho = \varrho'' d\varrho^2\,;$$

следовательно (по сокращении на $d\varphi^3$),

$$R = \frac{(\varrho'^2 + \varrho^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''},$$

где

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi} \quad \text{и} \quad \varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}.$$

§ 8. Формула и ряд Тэлора.

В заключение покажем, как при помощи формулы Тэлора можно выразить приращение функции через ее дифференциалы различных порядков.

Напишем для функции $y = f(x)$ формулу Тэлора с остаточным членом в форме Лагранжа [гл. II, § 4, формула (4)]:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\frac{\Delta x}{1}+f''(x)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}+\cdots+f^{(n-1)}(x)\frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}+$$
$$+f^{(n)}(x+\vartheta\Delta x)\frac{\Delta x^n}{n!}.$$

Обозначим приращение функции $f(x+\Delta x)-f(x)$ через Δy и примем во внимание (§ 2 и § 5), что

$$f'(x)\Delta x=dy,\quad f''(x)\Delta x^2=d^2y,\ \ldots,\quad f^{(n-1)}(x)\Delta x^{n-1}=d^{n-1}y,$$
$$f^{(n)}(x+\vartheta\Delta x)\Delta x^n=\{d^ny\}_{x+\vartheta\Delta x},$$

где $\{d^ny\}_{x+\vartheta\Delta x}$ обозначает дифференциал порядка n с заменой в нем x через $x+\vartheta\Delta x$; тогда формула Тэлора получает вид:

$$\Delta y=\frac{dy}{1}+\frac{d^2y}{2!}+\frac{d^3y}{3!}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\{d^ny\}_{x+\vartheta\Delta x}.$$

Таким образом, мы пришли к выражению приращения функции через ее дифференциалы различных порядков.

Если при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n!}\{d^ny\}_{x+\vartheta\Delta x}\to 0,$$

то мы можем написать такой (бесконечный) ряд:

$$\Delta y=\frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\frac{d^3y}{3!}+\ldots$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.
Интегральное исчисление.

ГЛАВА I.
Неопределенный интеграл.
§ 1. Основные понятия.

Пусть дана функция $y=f(x)$. Нахождение ее производной представляет задачу дифференциального исчисления; но можно поставить обратную задачу — отыскать ее начальную; этим вопросом занимается интегральное исчисление.

Так, если дано уравнение кривой $y=f(x)$ и требуется найти выражение углового коэффициента ее касательной через абсциссу, то это — задача дифференциального исчисления; если же, наоборот, известно это выражение и требуется найти уравнение кривой, то это—задача интегрального исчисления.

Например, если дана функция $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$, то производная $f'(x)=-\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}$, а начальная $F(x)=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. В самом деле,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]=\frac{1}{a}\,\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

Таким образом мы видим, что интегрирование, т.-е. отыскание начальной функции, есть операция, обратная по отношению к дифференцированию, подобно тому, как вычитание, деление и извлечение корня обратны соответственно сложению, умножению и возвышению в степень. Вспомним характерные особенности обратных действий, например, вычитания: при отыскании разности мы стараемся, во-первых, догадаться, какое число в сложении с вычитаемым дает уменьшаемое; затем при помощи сложения проверяем свою догадку и, наконец, если встречается надобность, вносим поправку; подобным же образом поступаем при делении, извлечении корня и при интегрировании, как показывает только что разобранный пример. В самом деле, сопоставляя функцию $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$ или $f(x)=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ с формулой дифференциального исчисления $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$, мы догадываемся, что начальная функция должна, повидимому, равняться $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, затем проверяем свою догадку при помощи дифференцирования $\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)'=\frac{a}{a^2+x^2}$ и, наконец, принимая во внимание, что дана функция $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$, а не $\frac{a}{a^2+x^2}$, вносим поправку, деля $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ на a, так что окончательно начальная функция принимает вид $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Этот метод догадок, проб, поверок и поправок носит в интегральном исчислении название *метода непосредственного интегрирования* и имеет на практике большое значение.

Вторая характерная черта обратных операций заключается в том, что они являются источниками новых понятий. Так, вычитание, чтобы стать возможным во всех случаях, повело к созданию новых чисел (по сравнению с положительными) отрицательных, деление — дробных, извлечение корня — несоизмеримых и мнимых. Со своей стороны интегрирование является неисчерпаемым источником новых *неэлементарных* функций, так как, если дифференцирование элементарной функции всегда приводит к функции элементарной же, то обратное положение не верно: интегрирование не всякой даже очень простой элементарной функции приводит к элементарной же функции. Так, например, начальная показательной функции e^x — тоже показательная e^x, так как $(e^x)'=e^x$; но начальная близкой ей функции $\frac{e^x}{x}$, получившейся всего только от деления показательной функции на аргумент, уже не элементарная функция и, как новая функция, получила особое название, именно „интегрального логарифма".

В-третьих, следует отметить, что последнее из обратных действий элементарной математики — извлечение корня — обладает одной особенностью, именно, многозначностью. Так, например, $\sqrt{a^2}=\pm a$. Следует ждать, что этим свойством и еще в более широком масштабе должно обладать интегрирование. В самом деле, в разобранном выше примере начальной функцией дроби $\frac{1}{a^2+x^2}$ может служить не только $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, но и $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+1$, $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-1$, $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+20$, $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{1}{3}$ и т. д., т.-е. бесчисленное множество функций, отличающихся от $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

и друг от друга на постоянные слагаемые. Общий вид, следовательно, всех этих функций будет $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$, где C — неопределенное или, как принято называть, произвольное постоянное, могущее принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$; полученное выражение $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C$ называется неопределенным интегралом функции $\frac{1}{a^2+x^2}$, что обозначается таким образом:

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

Вообще, если начальная функция от $f(x)$ равна $F(x)$, так что $F'(x)=f(x)$ или, в дифференциальной форме, $dF(x)=f(x)dx$, то тем же свойством обладают (часть вторая, гл. II, § 5, теорема 2) и все функции вида $F(x)+C$, где C — произвольное постоянное; в самом деле,

$$[F(x)+C]'=f(x) \quad \text{или} \quad d[F(x)+C]=f(x)dx.$$

Совокупность всех этих начальных функций называется неопределенным интегралом и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx,$$

где x называется переменным интеграции, а $f(x)$ — подъинтегральной функцией; самый символ читается таким образом: „неопределенный интеграл, взятый от функции $f(x)$ по переменному x", или (сокращенно) „интеграл $f(x)dx$".

Итак, согласно определению неопределенного интеграла, получаем:

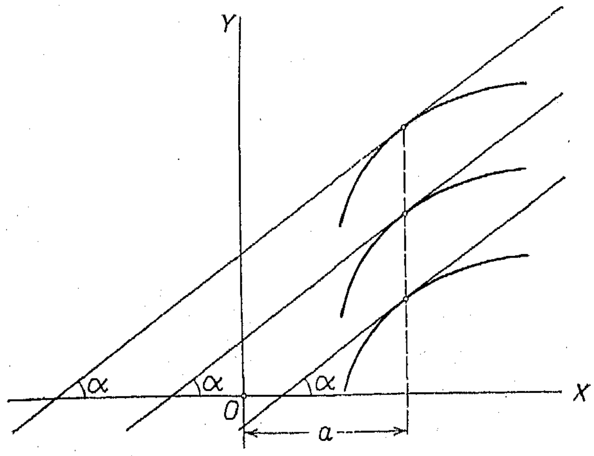
$$\int f(x)dx=F(x)+C; \qquad (J)$$

связь между теми же двумя функциями $f(x)$ и $F(x)$ представится в дифференциальной форме соотношением

$$dF(x)=f(x)dx. \qquad (I)$$

Из равенства (I) вытекает такая **теорема**.

Чтобы найти неопределенный интеграл, надо отыскать какую-нибудь начальную подъинтегральной функции и прибавить к ней в виде слагаемого произвольное постоянное.

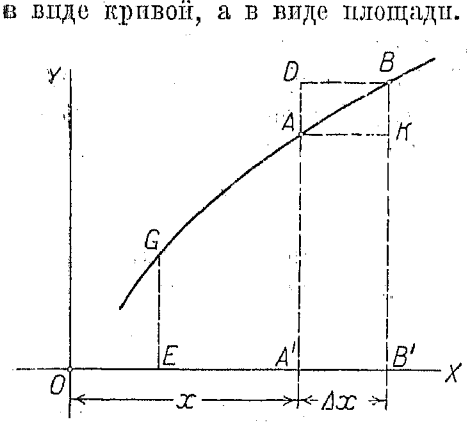


Фиг. 63.

Если графически представить семейство интегральных кривых $y=F(x)+C$ (фиг. 63), то легко сообразить, что все кривые семейства одинаковы по форме и отличаются друг от друга только положением, так что, перемещая одну из них вниз (в сторону отрицательного направления оси Y) и вверх (в сторону положительного направления оси Y), мы получим все остальные; ясно, что касательные к кривым семейства в точках, расположенных на одной прямой $x = a$, параллельны между собой и образуют с осью X угол α, где

$$\operatorname{tg} \alpha = f(a) = F'(a).$$

В некоторых случаях бывает удобнее представлять функцию не в виде кривой, а в виде площади. Пусть дана фигура $EGAA'$ (фиг. 64), которую мы назовем криволинейной или просто кривой трапецией и которая ограничена отрезком EA' оси X, ординатами EG и $A'A$ и дугой GA кривой $y = f(x)$; ясно, что площадь σ этой фигуры есть некоторая функция абсциссы $OA' = x$, т. е. $\sigma = \Phi(x)$. Найдем ее производную; из чертежа (фиг. 64) видно, что приращение $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$ изображается площадью кривой трапеции $A'ABB'$, которая заключена между двумя прямоугольниками $A'AKB'$ и $A'DBB'$ с площадями, соответственно равными $f(x)\Delta x$ и $f(x + \Delta x)\Delta x$. Следовательно, $(x)\Delta x < \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) < f(x + \Delta x)\Delta x$, откуда по делении на Δx



Фиг. 64.

$$f(x) < \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Так как $lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$, то (часть первая, § 8, теорема 5)

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \text{или} \quad \Phi'(x) = f(x).$$

Задавая различные числовые значения абсциссе OE и, следовательно, передвигая ординату EG, мы получим различные кривые трапеции, соответствующие различным начальным функциям. Таким образом неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = \Phi(x) + C$$

представится в виде площади кривой трапеции $EGAA'$, у которой ордината EG произвольна в соответствии с произвольным постоянным C, а ордината $A'A$ равна $f(x)$.

§ 2. Связь между дифференцированием и интегрированием.

Возьмем дифференциал от обеих частей равенства (J):

$$d\int f(x)dx = d[F(x)+C] = dF(x),$$

откуда, на основании соотношения (D),

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

т.-е., если функцию сперва проинтегрировать, а затем продифференцировать, то она остается без перемены.

Возьмем теперь интеграл от обеих частей равенства (D):

$$\int dF(x) = \int f(x)dx,$$

откуда, на основании соотношения (J),

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int \frac{d}{dx} F(x)dx = F(x) + C,$$

т.-е. если функцию сперва продифференцировать, а потом проинтегрировать, то она получает произвольное постоянное в виде слагаемого.

§ 3. Интегралы функций, начальные которых — основные элементарные.

Сопоставляя формулы (D) и (J) § 1 и применяя их к основным элементарным функциям, получим:

$dF(x) = f(x)dx$	(D)	$\int f(x)dx = F(x) + C$	(J)
1) $d\,\dfrac{x^{a+1}}{a+1} = x^a dx$ *)	(D_1)	$\int x^a dx = \dfrac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ *)	(J_1)
1') $d\ln\|x\| = \dfrac{dx}{x}$	(D'_1)	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	(J'_1)
2) $d\,\dfrac{a^x}{\ln a} = a^x dx$	(D_2)	$\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C$	(J_2)
2') $de^x = e^x dx$	(D'_2)	$\int e^x dx = e^x + C$	(J'_2)
3) $d\sin x = \cos x\,dx$	(D_3)	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	(J_3)
4) $d(-\cos x) = \sin x\,dx$	(D_4)	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	(J_4)

*) При $a \neq -1$.

5) $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ (D_5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$ (J_5)

6) $d(-\mathrm{ctg}\,x) = \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$ (D_6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$ (J_6)

7) $d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ (D_7) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C =$

$d\left(-\arccos \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$ $= -\arccos \frac{x}{a} + C$ (J_7)

8) $d\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx$ (D_8) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C =$

$d\left(-\frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx$ $= -\frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a} + C$ (J_8)

Кроме основных элементарных функций, рассмотрим еще такую:

7') $d\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ (D'_7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$ (J'_7)

Таким образом, например,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.$$

Так как две начальные одной и той же функции могут разниться только на некоторое постоянное (часть вторая, гл. II, § 5, теорема 2), то $\arcsin \frac{x}{a} - \left(-\arccos \frac{x}{a}\right) = A$, $\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} - \left(-\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a}\right) = B$. Для определения постоянных A и B дадим аргументу x какое-нибудь частное значение, например, нуль; тогда, так как $\arcsin 0 = 0$ и $\mathrm{arctg}\,0 = 0$, то $A = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ и $B = \mathrm{arcctg}\,0 = \frac{\pi}{2}$, и мы приходим к равенствам, известным из тригонометрии,

$$\arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}.$$

Полученная таблица формул не дает интегралов следующих основных элементарных функций: $\lg|x|$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$ и $\mathrm{arcctg}\,x$; мы их получим впоследствии.

§ 4. Основные теоремы и формулы.

I. Постоянный множитель можно вносить под знак интеграла и выносить из-под него (ср. фиг. 79), т.-е.

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \qquad \text{(I)}$$

Продифференцируем обе части равенства (I) по x (см. § 2):

$$\frac{d}{dx}\int cf(x)\,dx = cf(x),\quad \frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\,dx\right] = c\,\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = cf(x).$$

Так как после дифференцирования мы получили тождество $cf(x) = cf(x)$, то обе части равенства (I) могут разниться только на постоянное, которое писать излишне, так как символ неопределенного интеграла уже содержит в себе произвольное постоянное.

II. Интеграл от алгебраической суммы равен таковой же сумме интегралов от слагаемых (ср. фиг. 80), т. е.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)]\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_k(x)\,dx. \qquad \text{(II)}$$

Дифференцируем обе части равенства (II) по x (см. § 2):

$$\frac{d}{dx}\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)]\,dx = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x),$$
$$\frac{d}{dx}\left\{\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_k(x)\,dx\right\} =$$
$$= \frac{d}{dx}\int f_1(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int f_2(x)\,dx + \ldots + \frac{d}{dx}\int f_k(x)\,dx =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x).$$

Так как после дифференцирования получилось тождество

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x),$$

то, на основании только что приведенных соображений, равенство (II) тоже представляет собою тождество.

III. Формула замены переменного:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad \text{(III)}$$

где $x = \varphi(t)$.

Дифференцируем обе части равенства (III) по t (см. § 2):

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dt = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx\,\frac{dx}{dt} = f(x)\,\frac{dx}{dt} = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$
$$\frac{d}{dt}\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

откуда заключаем о правильности равенства (III).

IV. Формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad \text{(IV)}$$

где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$.

Равенство (IV) верно, так как

$$\frac{d}{dx}\int u\,dv = \frac{d}{dx}\int \varphi(x)\psi'(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[uv - \int v\,du\right] = \frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\,\psi(x)\right] - \frac{d}{dx}\int \psi(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \varphi(x)\,\psi'(x) + \psi(x)\,\varphi'(x) - \psi(x)\,\varphi'(x) = \varphi(x)\,\psi'(x).$$

§ 5. Основные задачи теории неопределенных интегралов.

Мы уже видели (§ 1), что интеграл такой простой функции, как $\frac{e^x}{x}$, есть функция неэлементарная, называемая интегральным логарифмом. То же замечание относится, например, к функциям $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, e^{x^2}, $\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$, так что функции интегральный логарифм $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, интегральный синус $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$, интегральный косинус $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ и интегралы Френеля $\int e^{x^2}\,dx$, $\int \sin(x^2)\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$ являются примерами неэлементарных функций; таких примеров можно дать, сколько угодно. Отсюда мы видим, что элементарные функции распадаются на „интегрируемые“ [1]) функции, интегралы которых элементарные функции, и „неинтегрируемые“, интегралы которых функции неэлементарные. Таким образом, „проинтегрировать функцию“ это означает выразить ее интеграл через элементарные функции, если это возможно. Отсюда вытекают три задачи теории неопределенных интегралов:

1) найти те методы, при помощи которых можно проинтегрировать данную функцию;

2) найти классы „интегрируемых“ функций (так, например, в более обширных курсах доказывается, что интеграл от рациональной функции есть функция элементарная);

3) решить вопрос о существовании интеграла.

Из геометрических соображений, изложенных в § 1, видно, что у непрерывной функции существует интеграл, так как для всякой кривой трапеции существует число, выражающее ее площадь. В дальнейшем (гл. II, § 5) мы увидим, что понятие интеграла можно распространить на случай некоторых прерывных функций (ср. фиг. 73 и 77).

Прежде всего перейдем к рассмотрению методов интегрирования, т. е. к первой задаче теории неопределенных интегралов.

§ 6. Основные методы интегрирования.

I. Метод непосредственного интегрирования (метод догадок, проб, проверок и поправок), как мы видели (§ 1), состоит в том,

[1]) В современной математике функции рассматриваются как интегрируемые и неинтегрируемые с точки зрения существования или несуществования интеграла; такая постановка вопроса выходит за пределы настоящего курса.

что по виду подъинтегральной функции стараются догадаться, хотя бы в общих чертах, относительно вида начальной функции и потом при помощи поверки исправляют то выражение начальной функции, которое получено путем догадки.

ПРИМЕР 1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$; в самом деле, догадываемся из сравнения с формулой $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, что начальная функция должна иметь вид $\ln|ax+b|$; дифференцируем: $(\ln|ax+b|)' = \frac{a}{ax+b}$; сопоставляя с подъинтегральной функцией $\frac{1}{ax+b}$, видим, что необходимо ввести в начальную функцию поправку в виде множителя $\frac{1}{a}$; в результате получаем начальную функцию $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$.

ПРИМЕР 2. Аналогично рассуждая, получим

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C.$$

Увеличивать число примеров мы не станем, так как без метода непосредственного интегрирования не может обойтись ни одно из отысканий начальной функции и, следовательно, с этим методом мы будем в дальнейшем встречаться постоянно.

II. Метод разложения состоит в том, что подъинтегральная функция рассматривается, как сумма более простых функций. Этот метод основывается на формуле (II) § 4.

ПРИМЕР 1. $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)\, dx =$

$$= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \frac{a_2}{n-1} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{3} x^3 + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C.$$

Это равенство получается путем интегрирования [§ 4, теорема 1 и § 3, формула (J_1)] сперва первого члена $a_0 x^n$, затем второго $a_1 x^{n-1}$ и т. д., кончая последним a_n, вместе с тем оно дает возможность формулировать **теорему:** целая рациональная функция — „интегрируемая“, так как интеграл ее элементарная функция, именно — тоже целая рациональная.

ПРИМЕР 2. Найти интегралы от гиперболических синуса и косинуса

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}:$$

$$\int \sinh x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + C = \cosh x + C,$$

$$\int \cosh x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(e^x + e^{-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + C = \sinh x + C.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим частный случай интеграла рациональной функции $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$. Попробуем представить подъинтегральную функцию в виде алгебраической суммы дробей $\frac{1}{x-a}$ $\frac{1}{x+a}$; так как $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{2x}{x^2-a^2}$, а $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2}$, то берем второе тождество, разделивши предварительно обе части его на $2a$:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+C=$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

ПРИМЕР 4. $\int \frac{Mx+N}{x^2+mx+n}dx$, где у знаменателя действительные корни a и b, так что $x^2+mx+n=x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$. Для интегрирования воспользуемся тождеством, которое легко проверить при помощи вычитания дробей,

$$\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}=\frac{1}{a-b}\left[\frac{Ma+N}{x-a}-\frac{Mb+N}{x-b}\right];$$

благодаря тождеству можем написать

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+mx+n}dx=\frac{1}{a-b}\int\left[\frac{Ma+N}{x-a}-\frac{Mb+N}{x-b}\right]dx=$$
$$=\frac{1}{a-b}\Big[(aM+N)\ln|x-a|-(bM+N)\ln|x-b|\Big]+C.$$

ПРИМЕР 5. $\int \frac{Mx+N}{x^2+mx+n}dx$, где у знаменателя комплексные корни $a=s+ti$ и $b=s-ti$, так что

$$x^2+mx+n=(x-s)^2+t^2.$$

Для интегрирования воспользуемся тождеством

$$\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}=\frac{M}{2}\,\frac{2x+m}{x^2+mx+n}+\left(N-\frac{Mm}{2}\right)\frac{1}{x^2+mx+n}:$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+mx+n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+m}{x^2+mx+n}dx+\left(N-\frac{Mm}{2}\right)\int\frac{d(x-s)}{(x-s)^2+t^2}=$$
$$=\frac{M}{2}\ln|x^2+mx+n|+\frac{1}{t}\left(N-\frac{Mm}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{x-s}{t}+C.$$

ПРИМЕР 6. $\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

ПРИМЕР 7. $\int \cosh^2 x\,dx$.

Так как $\cosh^2 x=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})=\frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$,

то

$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cosh 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + C.$$

III. Метод подстановки состоит в том, что, вводя новое переменное интеграции, стараются упростить выражение подъинтегральной функции; этот метод основывается на формуле (III) § 4.

ПРИМЕР 1. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C.$

ПРИМЕР 2. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

ПРИМЕР 3. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

ПРИМЕР 4. $\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} =$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

ПРИМЕР 5. $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

ПРИМЕР 6. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln|\varphi(x)| + C.$

ПРИМЕР 7. $\int [\varphi(x)]^a \varphi'(x)\,dx = \frac{1}{a+1}[\varphi(x)]^{a+1} + C.$

ПРИМЕР 8. $\int e^{\varphi(x)} \varphi'(x)\,dx = e^{\varphi(x)} + C.$

ПРИМЕР 9. $\int \sin[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = -\cos[\varphi(x)] + C.$

ПРИМЕР 10. $\int \frac{\varphi'(x)}{a^2+[\varphi(x)]^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a} + C.$

IV. Метод интегрирования по частям состоит в том, что разбивают подъинтегральную функцию на два сомножителя (на две части) и вычисление данного интеграла приводят 1) к определению начальной функции одного из сомножителей и 2) к нахождению интеграла от произведения этой начальной функции на производную другого сомножителя. Метод основывается на формуле (IV) § 4:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{IV}$$

ПРИМЕР 1. $\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int x\frac{dx}{x} = x(\ln|x|-1) + C.$

ПРИМЕР 2. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Точно таким же способом вычисляются

$$\int \arccos x\, dx, \quad \int \operatorname{arctg} x\, dx, \quad \int \operatorname{arcctg} x\, dx$$

ПРИМЕР 3. $\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + C.$

ПРИМЕР 4. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2\int e^x dx =$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

V. Комбинация различных методов и приемов.

ПРИМЕР 1. $\int e^x \cos x\, dx.$

В формуле (IV) полагаем $u = e^x$, $v = \cos x$:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx;$$

полагаем теперь $u = \cos x$, $v = e^x$:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx;$$

складываем почленно эти равенства и делим на 2:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

ПРИМЕР 2. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

Полагаем $x = a \sin t$, а затем пользуемся результатами примера 6 отдела II:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2} a^2 t + \frac{1}{4} a^2 \sin 2t + C;$$

так как $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $a^2 \sin 2t = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$, то

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

ПРИМЕР 3. $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$

Это равенство мы получили по формуле (IV), полагая

$$u = \sqrt{x^2 + a}, \quad v = x;$$

воспользуемся теперь тождеством $\sqrt{x^2+a} = \frac{a}{\sqrt{x^2+a}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}$:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}};$$

складываем почленно полученные равенства и делим на два:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + C.$$

ПРИМЕР 4. Найти $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ методом подстановки, как во втором примере.

Полагаем $x=\sinh t$, где гиперболический синус $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$; легко сообразить, что

$$d(\sinh t) = d\,\frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt = \cosh t\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})} = \frac{e^t+e^{-t}}{2} = \cosh t,$$

т.-е.

$$\sqrt{\sinh^2 t+1} = \cosh t;$$

следовательно,

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \int\cosh^2 t\,dt;$$

воспользуемся теперь результатами примера 7 отдела II:

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \int\cosh^2 t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sinh(2t) + C,$$

так как

$$x = \frac{e^t-e^{-t}}{2}, \text{ то } t = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|;$$

затем

$$\sinh(2t) = \frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t}) = 2\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2} = 2x\sqrt{x^2+1},$$

т.-е.

$$\sinh(2t) = 2\sinh t\cosh t;$$

следовательно,

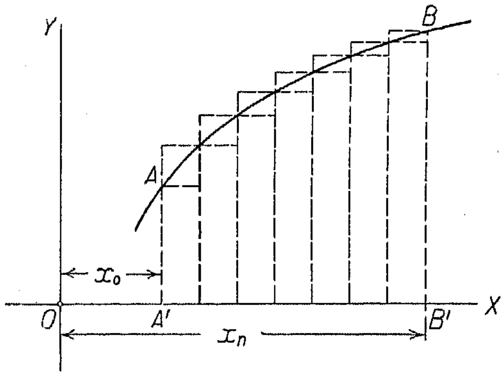
$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C.$$

ГЛАВА II.

Определенный интеграл.

§ 1. Возникновение понятия определенного интеграла.

Возьмем кривую трапецию $A'ABB'$ (фиг. 65), ограниченную отрезком $A'B'$ оси X, дугой AB кривой $y=f(x)$ и ординатами $A'A$ и $B'B$, соответствующими абсциссам $OA'=a$ и $OB'=b$, и определим ее площадь σ. Для этого в интервале (a, b) возьмем числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}$ и для удобства обозначим границы интервала через x_0 и x_n, так что $a=x_0$ и $b=x_n$. Построим ординаты



Фиг. 65.

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,$$
$$f(x_l),\ f(x_{l+1}),\ \ldots,\ f(x_{n-1}),$$

соответствующие абсциссам $x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}$, и вычислим основания получившихся элементарных трапеций, т.-е. величины элементарных интервалов

$$(x_0,\ x_1),\ (x_1,\ x_2),\ \ldots,\ (x_l,\ x_{l+1}),\ \ldots;\ (x_{n-1},\ x_n):$$
$$\Delta x_0=x_1-x_0,\ \Delta x_1=x_2-x_1,\ \ldots,\ \Delta x_l=x_{l+1}-x_l,\ \ldots,\ \Delta x_{n-1}=x_n-x_{n-1}.$$

Построим на основании каждой элементарной трапеции два прямоугольника с высотами, равными наименьшей и наибольшей ординатам в соответствующем элементарном интервале. Обозначим через $m_0, m_1, \ldots m_{n-1}$ наименьшие, через $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ наибольшие ординаты, а через σ_n и Σ_n площади получающихся при этом ступенчатых фигур; тогда

$$\sigma_n=m_0\Delta x_0+m_1\Delta x_1+\ldots+m_l\Delta x_l+\ldots+m_{n-1}\Delta x_{n-1}$$

и

$$\Sigma_n=M_0\Delta x_0+M_1\Delta x_1+\ldots+M_l\Delta x_l+\ldots+M_{n-1}\Delta x_{n-1};$$

получившиеся суммы сокращенно обозначим

$$\sigma_n = \overset{l=n-1}{\underset{l=0}{\mathrm{S}}} m_l \Delta x_l \quad \text{и} \quad \Sigma_n = \overset{l=n-1}{\underset{l=0}{\mathrm{S}}} M_l \Delta x_l$$

или

$$\sigma_n = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}} m_l \Delta x_l \quad \text{и} \quad \Sigma_n = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}} M_l \Delta x_l;$$

последнее обозначение показывает, что аргумент x изменяется в интервале (a, b). Из чертежа (фиг. 65) видно, что $\sigma_n < \sigma < \Sigma_n$. Покажем, что, если число элементарных интервалов n неограниченно растет, так что каждый из интервалов $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_{n-1}$ стремится к нулю, то разность $\Sigma_n - \sigma_n$, а следовательно и меньшие, чем $\Sigma_n - \sigma_n$, разности $\Sigma_n - \sigma$ и $\sigma - \sigma_n$ стремятся тоже к нулю, т.-е. $\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. В самом деле, $\Sigma_n - \sigma_n = [f(x_1) - - f(x_0)]\Delta x_0 + [f(x_2) - f(x_1)]\Delta x_1 + \ldots + [f(x_{l+1}) - f(x_l)]\Delta x_l + \ldots + [f(x_n) - - f(x_{n-1})]\Delta x_{n-1}$ (см. полосу прямоугольников вдоль дуги AB на фиг. 65); геометрически очевидно, что мы можем сблизить всегда таким образом каждые две соседние ординаты, чтобы

$$\begin{aligned}
&f(x_1) - f(x_0) < \varepsilon_1, \\
&f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f(x_{l+1}) - f(x_l) < \varepsilon_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f(x_n) - f(x_{n-1}) < \varepsilon_1,
\end{aligned}$$

где число ε_1 мы определим ближе впоследствии. Аналитически эти неравенства вытекают из того, что функция $y = f(x)$ непрерывная. Из этих неравенств следует, что

$$\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon_1 \Delta x_0 + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \ldots + \varepsilon_1 \Delta x_l + \ldots + \varepsilon_1 \Delta x_{n-1}$$

или

$$\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon_1 (b - a),$$

так как

$$\Delta x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_l + \ldots + \Delta x_{n-1} = b - a;$$

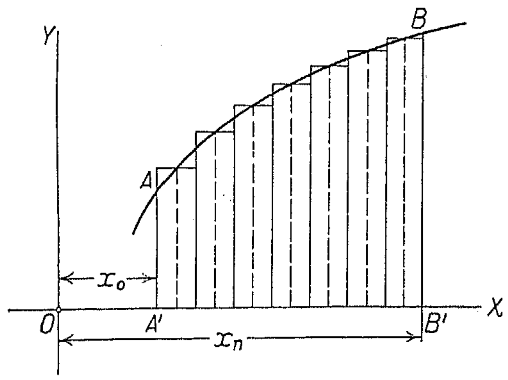
полагая $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$, получаем $\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon$. Таким образом, если $n \to \infty$, так что $\Delta x_0 \to 0$, $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_l \to 0, \ldots, \Delta x_{n-1} \to 0$, то разность $\Sigma_n - \sigma_n$ и, следовательно, разности $\sigma - \sigma_n$ и $\Sigma_n - \sigma$ бесконечно малы, т.-е.

$$\sigma = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_l \to 0}} \sigma_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_l \to 0}} \Sigma_n.$$

Вставим в каждый элементарный интервал (x_l, x_{l+1}) промежуточное число ξ_l, которое может равняться, в частности, и границам интервала x_l и x_{l+1}; таким образом придем к такому ряду чисел:

$$x_0, \xi_0, x_1, \xi_1, x_2, \ldots, x_l, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}, \xi_{n-1}, x_n.$$

На основаниях элементарных трапеций построим прямоугольники соответственно с высотами $f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l), \ldots, f(\xi_{n-1})$; получится ступенчатая фигура, площадь которой $S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \\ + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \mathop{S}\limits_a^b f(\xi_i)\Delta x_i$ такова, что



Фиг. 66.

$\sigma_n \leqslant S_n \leqslant \Sigma_n$; откуда $\sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} S_n$ (часть первая, § 8, теорема 5) или

$$\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \mathop{S}\limits_a^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Этот предел называется определенным интегралом и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$, который читается таким образом: „интеграл от a до b $f(x)\,dx$". Следовательно, определенный интеграл определяется таким равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \mathop{S}\limits_a^b f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (0)$$

Мы видели, что предел суммы (0) не зависит от выбора чисел x_i и ξ_i; следовательно, $\int_a^b f(x)\,dx$ не зависит от x, т.-е. определенный интеграл не зависит от переменного интеграции

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots\ldots$$

Легко сообразить (см., например, фиг. 65 или фиг. 66), что определенный интеграл зависит от пределов (границ): верхнего b и нижнего a; в дальнейшем мы будем обычно считать переменным только верхний предел, так что

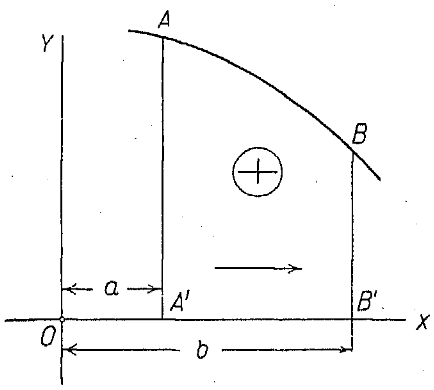
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b).$$

Так как всегда существует число $\sigma = \int_a^b f(x)dx$, дающее в квадратных единицах величину площади кривой трапеции $A'ABB'$, то у функции, непрерывной в данном интервале (a, b), всегда существует определенный интеграл в этом интервале; мы вскоре (§ 5) увидим, что определенный интеграл существует и у некоторых прерывных функций.

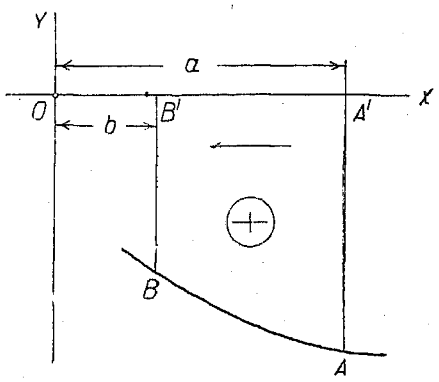
В течение курса мы не раз убеждались, как и в настоящем случае, насколько важно, чтобы аналитические исследования сопровождались геометрическим истолкованием; между тем положение, что определенный интеграл геометрически изображается площадью соответствующей кривой трапеции, только тогда будет иметь общее значение, если под площадью разуметь число относительное. В полном соответствии с определением определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \mathop{S}_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (0)$$

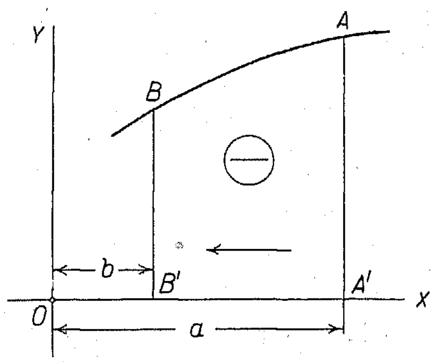
условимся считать площадь положительной, если она образована движением положительной ординаты $[f(x)>0]$ в положительном направлении



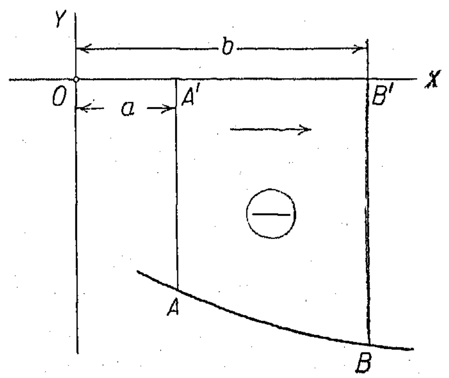
Фиг. 67.



Фиг. 68.



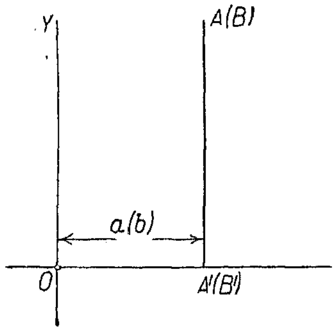
Фиг. 69.



Фиг. 70.

($a<b$, так что $\Delta x_i>0$, фиг. 67) или отрицательной ординаты $[f(x)<0]$ в отрицательном направлении ($a>b$ и $\Delta x_i<0$, фиг. 68); точно так же условимся считать площадь отрицательной, если она образована движением положительной ординаты $[f(x)>0]$ в отрицательном направлении

($a > b$ и $\Delta x_i < 0$, фиг. 69) или отрицательной ординаты [$f(x) < 0$] в положительном направлении ($a < b$ и $\Delta x_i > 0$, фиг. 70). Таким образом, площадь может быть положительной и отрицательной; чтобы она могла равняться нулю, будем рассматривать площадь прямолинейного отрезка $A'A$ (фиг. 71), разумея под ней предел площади кривой трапеции $B'BAA'$, когда точка B неограниченно приближается к точке A и, следовательно, B' к A'. В соответствии с этим условимся разуметь под интегралом с равными пределами нуль:



Фиг. 71.

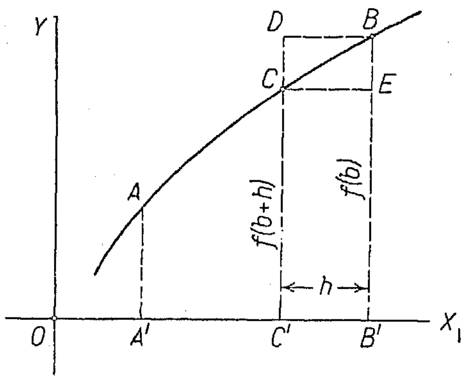
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

§ 2. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.

Рассмотрим определенный интеграл, как функцию верхнего предела b:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

и найдем производную этой функции, опираясь на определение производной; дадим верхнему пределу b приращение $h = B'C'$ (фиг. 72); тогда разность $\Phi(b+h) - \Phi(b)$ геометрически представится в виде площади $B'BCC'$; построим на основании $B'C'$ трапеции $B'BCC'$ прямоугольники $B'ECC'$ и $B'BDC'$; из чертежа (фиг. 72) видно, что прямоугольники $C'CEB'$ и $C'DBB'$ соответственно меньше и больше трапеции $C'CBB'$:



Фиг. 72.

$$(-h)\,f(b+h) < -\Phi(b+h) + \Phi(b) < (-h)\,f(b);$$

отсюда, по делении на $-h$,

$$f(b+h) < \frac{\Phi(b+h) - \Phi(b)}{h} < f(b)$$

и, следовательно (часть первая, § 8, теорема 5),

$$lim_{h \to 0} \frac{\Phi(b+h) - \Phi(b)}{h} = f(b),$$

т. е.

$$\frac{d}{db}\,\Phi(b) = f(b)$$

или

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу равна подъинтегральной функции, у которой переменное интеграции заменено верхним пределом.

Таким образом, определенный интеграл есть начальная подъинтегральной, именно, та начальная, которая обращается в нуль, когда аргумент принимает значение, равное нижнему пределу. В самом деле, $\Phi(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0$ (§ 1).

§ 3. Связь определенного интеграла с начальной функцией от подъинтегральной.

Пусть функция $F(x)$ начальная подъинтегральной: $F'(x)=f(x)$. Так как две функции с равными производными могут разниться только на постоянное (часть вторая, гл. II, § 5), то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)+A;$$

полагаем $b=a$: $\int_a^a f(x)\,dx=F(a)+A$, т.-е. $0=F(a)+A$, откуда $A=-F(a)$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_{x=a}^{x=b}$$

или

$$\int_a^b F(x)\,dx=\Big|_a^b F(x), \tag{F}$$

где смысл символа двойной подстановки $\Big[\,F(x)\,\Big]_{x=a}^{x=b}$ и символа Саррюса $\Big|_a^b F(x)$ ясен:

$$\Big[\,F(x)\,\Big]_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a), \quad \Big|_a^b F(x)=F(b)-F(a).$$

Формула (F) является крайне важной, так как дает возможность для вычисления определенного интеграла пользоваться результатами теории неопределенных интегралов, взамен нахождения предела суммы, как это вытекает из равенства (0).

§ 4. Связь определенного интеграла с неопределенным.

Так как определенный интеграл есть одна из начальных подъинтегральной, то на основании определения неопределенного интеграла можем написать:

$$\int f(b)db=\int_a^b f(x)dx+C.$$

Часто верхний предел обозначают той же буквой x, что и переменное интеграции:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C,$$

где всегда нужно помнить, что x, стоящее в верхнем пределе и в неопределенном интеграле, и x, стоящее под знаком определенного интеграла, обозначают не одно и то же.

Иногда в последней записи опускают произвольное постоянное, считая в качестве такового нижний предел a, и, таким образом, пишут:

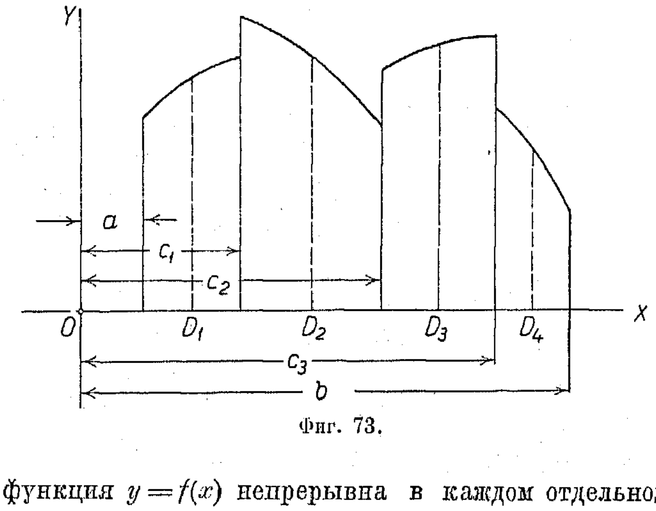
$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx.$$

§ 5. Обобщение понятия определенного интеграла.

1. Пусть дана функция $y = f(x)$, непрерывная в интервале (a, b), за исключением „точек разрыва" $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (часть первая, § 1); тогда символу $\int_a^b f(x)\,dx$ дадим такое определение:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{d_1} f(x)dx + \int_{d_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{d_2} f(x)dx + \ldots +$$
$$+ \int_{d_k}^{c_k} f(x)dx + \int_{c_k}^{d_{k+1}} f(x)dx + \int_{d_{k+1}}^{b} f(x)dx, \tag{1}$$

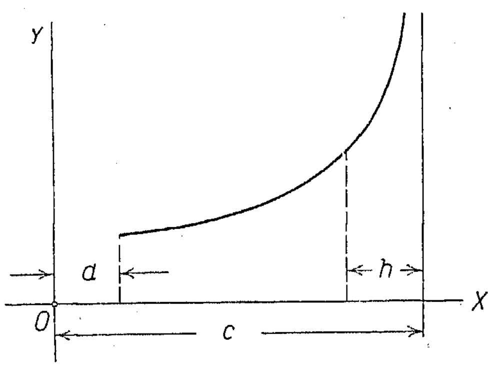
где $d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}$ произвольные „точки" соответственно внутри интервалов $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{k-1}, c_k), (c_k, b)$, т.-е. абсциссы точек $D_1, D_2, \ldots, D_{k+1}$ (фиг. 73).



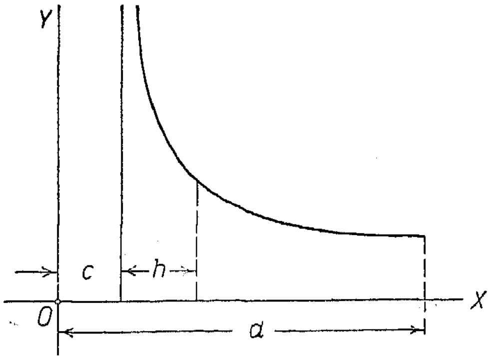
Фиг. 73.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждом отдельном интервале $(a, d_1), (d_1, c_1), \ldots, (d_{k+1}, b)$ (фиг. 73), то каждое слагаемое в отдельности существует (§ 1), а следовательно существует и вся сумма (1). В противном же случае каждое слагаемое требует дальнейшего исследования.

Рассмотрим, например, $\int_d^c f(x)dx$, где верхний предел c является точкой разрыва подъинтегральной функции $f(x)$ (фиг. 74); так как



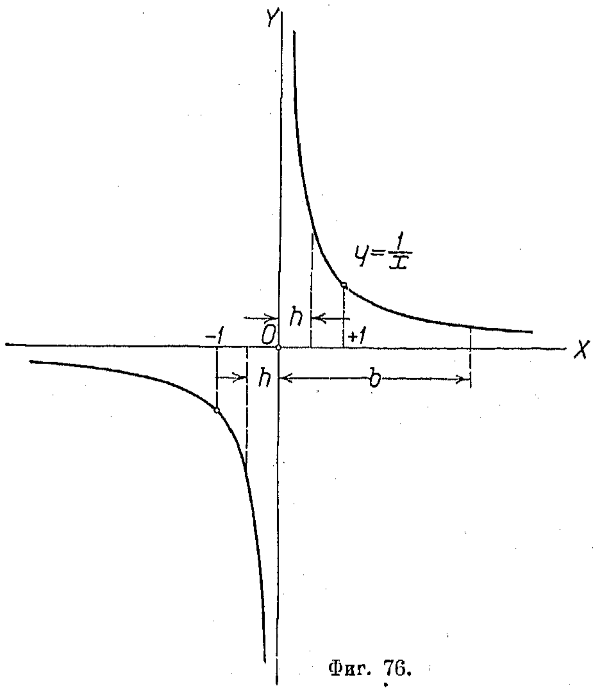
Фиг. 74.



Фиг. 75.

кция $f(x)$ в интервале $(d, c-h)$, где $h>0$, непрерывна, то $\int_d^{c-h} f(x)dx$ существует; тогда символу $\int_d^c f(x)dx$ дадим такое определение:

$$\int_d^c f(x)dx = \lim_{h\to+0} \int_d^{c-h} f(x)dx. \tag{2}$$



Фиг. 76.

Если последний предел существует, то символ $\int_d^c f(x)\,dx$ имеет смысл; в противном случае, если предела нет, этот символ смысла не имеет.

То же самое замечание относится к равенству (фиг. 75):

$$\int_c^d f(x)\,dx = lim_{h\to+0}\int_{c+h}^d f(x)\,dx. \tag{3}$$

ПРИМЕР 1. $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ (фиг. 76).

Согласно определению,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{+1}\frac{dx}{x},$$

где

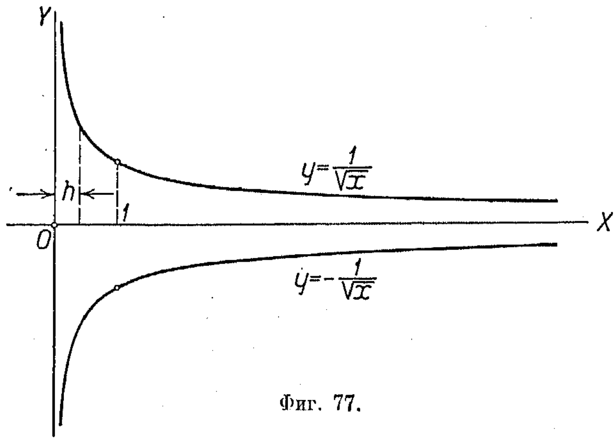
$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}=lim_{h\to+0}\int_{-1}^{-h}\frac{dx}{x} \text{ и } \int_{0}^{+1}\frac{dx}{x}=lim_{h\to+0}\int_{h}^{+1}\frac{dx}{x};$$

так как

$$\int_{-1}^{-h}\frac{dx}{x}=\Big|_{-1}^{-h} lim\,|x| = \ln|-h|-\ln|-1| = \ln h \text{ и } \int_{h}^{+1}\frac{dx}{x}=-\ln h \quad (\S\ 3)$$

и так как у $\ln h$ предела нет при $h\to 0$, то символ $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ смысла не имеет.

ПРИМЕР 2. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (фиг. 77).



Фиг. 77.

Согласно определению,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=lim_{h\to+0}\int_h^1\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Так как

$$\int_h^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\Big|_h^1\sqrt{x}=2(1-\sqrt{h})$$

и

$$lim_{h\to+0}\int_h^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=lim_{h\to+0}2(1-\sqrt{h})=2,$$

то

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2.$$

II. Пусть дана функция, непрерывная в интервале (a, ∞); тогда символу $\int_a^\infty f(x)\,dx$ дадим такое определение:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = lim_{\,b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Точно так же равенства

$$\int_\infty^b f(x)\,dx = lim_{\,a\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \tag{6}$$

представляют определения символов

$$\int_\infty^b f(x)\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Если какой-либо из пределов существует, то соответствующий символ имеет смысл; в противном же случае он смысла не имеет.

ПРИМЕР 1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ (фиг. 76).

Согласно определению,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = lim_{\,b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

Так как

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \Big|_1^b \ln|x| = \ln b$$

и так как у $\ln b$ при $b\to\infty$ предела нет, то символ $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ смысла не имеет.

ПРИМЕР 2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ (фиг. 78).

Согласно определению,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = lim_{\,a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^2}.$$

Так как

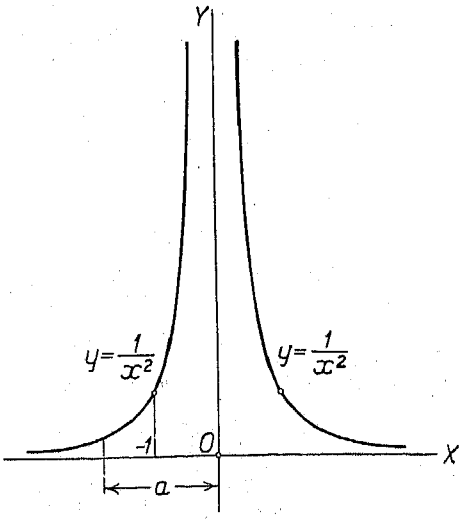
$$\int_a^{-1} \frac{dx}{x^2} = -\Big|_a^{-1} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{a}$$

и

$$lim_{\,a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) = 1,$$

то

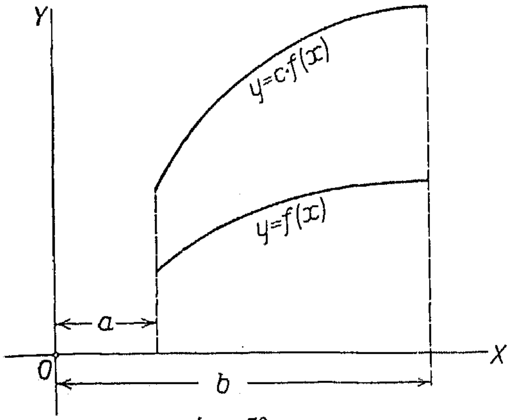
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1\,.$$



Фиг. 78.

§ 6. Основные теоремы и формулы.

Для вывода основных теорем и формул теории определенных интегралов можно пользоваться: 1) определением определенного интеграла [§ 1. равенство (0)], 2) соотношением между ним и какой-нибудь начальной функцией от подъинтегральной [§ 3, формула (F)], 3) тем обстоятельством, что интегрирование есть операция, обратная дифференцированию. Наиболее громоздким является первый прием доказательства.



Фиг. 79.

1. Постояный множитель можно вносить под знак и выносить из-под знака определенного интеграла (фиг. 79)

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Из тождества $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} c f(\xi_i)\,\Delta x_i = c \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ по переходе к пределу получается:

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} c f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim \left[c \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right] = c \lim \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{S}}} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

т.-е.

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы равен таковой же сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_k(x)]\,dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{2}$$

Дифференцируем по верхнему пределу отдельно левую и отдельно правую часть равенства (2):

$$\frac{d}{db}\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)]\,dx = f_1(b) + f_2(b) + \ldots + f_k(b);$$

$$\frac{d}{db}\left\{\int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_k(x)\,dx\right\} =$$
$$= \frac{d}{db}\int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \frac{d}{db}\int_a^b f_k(x)\,dx = f_1(b) + \ldots + f_k(b).$$

Отсюда вытекает, что левая часть равенства (2) может отличаться от правой на некоторое постоянное C. Полагая $b=a$, получаем

$$\int_a^a [f_1(x)+\ .\ .\ .\ +f_k(x)]\,dx=\int_a^a f_1(x)\,dx+\ .\ .\ .\ +\int_a^a f_k(x)\,dx+C$$

или $0=0+C$, т.-е. $C=0$.

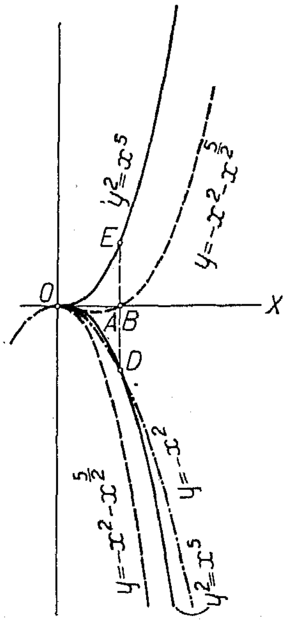
ПРИМЕР (фиг. 80).

Площадь $OAB=\int_0^1(-x^2+x^{5/2})\,dx=$

$$=\Big|_0^1\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{7}x^{7/2}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=-\frac{1}{21}\ \text{кв. ед.;}$$

площадь $OBD=\int_0^1(-x^2)dx=-\dfrac{1}{3}$ кв. ед.;

площадь $OBE=\int_0^1 x^{5/2}\,dx=\dfrac{2}{7}$ кв. ед.



Фиг. 80.

3. Формула замены переменного под знаком определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

где функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ в интервале (α,β) и при непрерывном изменении t от α до β непрерывно и монотонно изменяется от $a=$ $=\varphi(\alpha)$ до $b=\varphi(\beta)$.

Продифференцируем по верхнему пределу β обе части равенства (3):

$$\frac{d}{d\beta}\int_a^b f(x)dx=\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx\cdot\frac{db}{d\beta}=f(b)\,\frac{db}{d\beta}=f[\varphi(\beta)]\,\varphi'(\beta);$$

$$\frac{d}{d\beta}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=f[\varphi(\beta)]\,\varphi'(\beta);$$

следовательно, обе части равенства (3) могут разниться только на постоянное C, которое равно нулю, как это видно из того, что, если положить

$$\beta=\alpha\ \text{ и }\ b=\varphi(\beta)=\varphi(\alpha)=a,\ \text{ то }\int_a^a f(x)dx=\int_\alpha^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt+C,$$

т.-е. $0=0+C$, откуда $C=0$.

Метод замены переменного особенно удобен для определенного интеграла, так как в этом случае не приходится возвращаться к старому переменному интеграции, как при вычислении неопределенного интеграла.

ПРИМЕР. $\displaystyle\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$, где $x=a\sin t$.

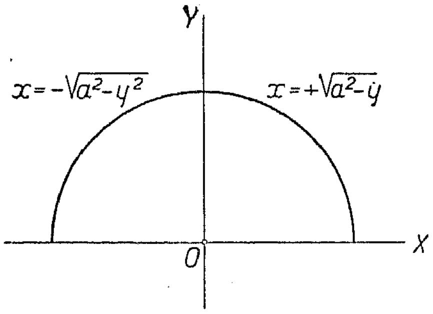
Так как

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\quad\text{и}\quad\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\pi,$$

то

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \pi a^2$$

(фиг. 81). Если применить подстановку $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, то



Фиг. 81.

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\int_0^0 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0;$$

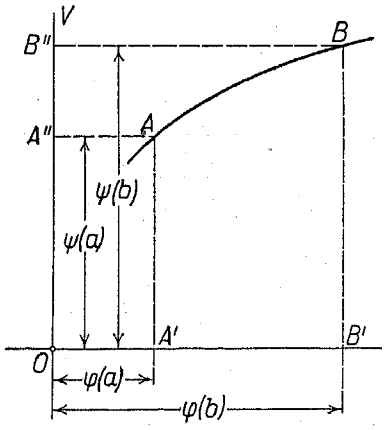
получение неверного результата объясняется тем, что при изменении y от 0 до a следовало взять функцию $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$, а при изменении y от a до 0 функцию $x = +\sqrt{a^2 - y^2}$, так что

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^a \frac{y^2\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \int_a^0 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{\pi}{4} a^2 - \left(-\frac{\pi}{4} a^2\right) = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

4. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\, dv = \Big|_a^b uv - \int_a^b v\, du, \tag{4}$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. При решении задач на определенный интеграл этой формулой обычно не пользуются, а берут такую же формулу для неопределенного интеграла и по окончании вычислений подставляют пределы. Поэтому аналитического доказательства формулы (4) не даем, геометрически же она очевидна, если представить ее в таком виде:



Фиг. 82.

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} u\, dv = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a) - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} v\, du$$

(см. фиг. 82), где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ параметрические уравнения кривой AB, т. е.

площ. $A''ABB''$ = площ. $OB'BB''$ — — площ. $OA'AA''$ — площ. $A'ABB'$.

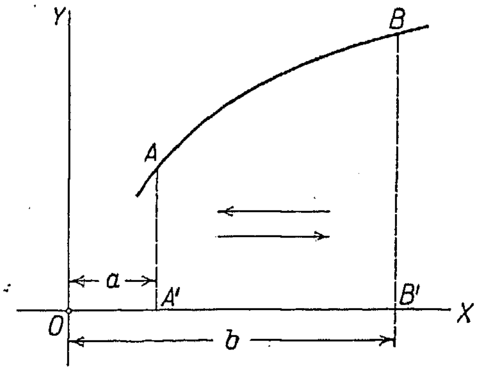
5. При перестановке пределов определенный интеграл меняет свой знак:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \tag{5}$$

В самом деле, обозначая начальную функции $f(x)$ через $F(x)$, мы на основании формулы (F) § 3 получаем

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Геометрически эта теорема очевидна (фиг. 83), так как оба интеграла дают величину одной и той же площади, но один раз эта площадь образована движением ординаты в одном направлении, а другой раз в противоположном.



Фиг. 83.

6. **Производная определенного интеграла по нижнему пределу:**

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a). \qquad (6)$$

В самом деле,

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{d}{da}\left[-\int_b^a f(x)\,dx\right] = -\frac{d}{da}\int_b^a f(x)\,dx = -f(a).$$

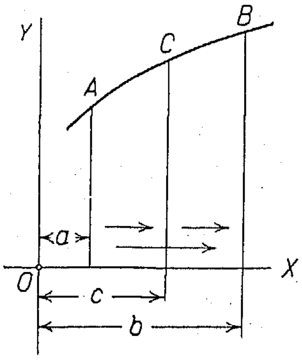
7.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

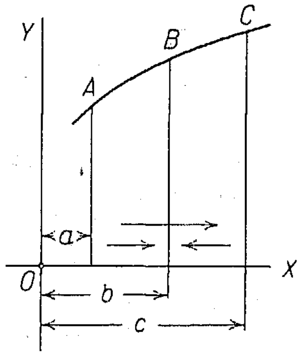
В самом деле,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

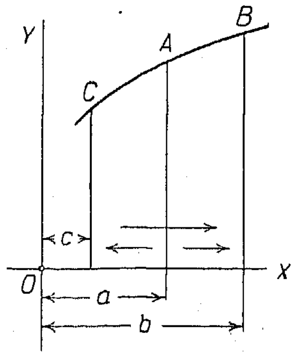
Геометрически формула (7) очевидна (фиг. 84, 85, 86); ее можно распространить на любое число слагаемых:



Фиг. 84.



Фиг. 85.



Фиг. 86.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_k}^b f(x)\,dx, \qquad (7')$$

так как

$$F(b) - F(a) = F(c_1) - F(a) + F(c_2) - F(c_1) + \ldots + F(b) - F(c_k).$$

8. **Теорема о среднем значении.** Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, непрерывные в интервале (a, b), из которых вторая сохраняет свой знак неизменным; тогда внутри этого интервала существует такое число c, что

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ начальные функции соответственно функций $f(x)\,\varphi(x)$ и $\varphi(x)$, так что $F'(x) = f(x)\,\varphi(x)$ и $\Phi'(x) = \varphi(x)$; тогда по основной формуле (F) (§ 3) интегрального исчисления можем написать

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx = F(b) - F(a), \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

По теореме Коши (часть вторая, гл. II, § 3) внутри интервала (a, b) существует такое число c, что

$$[F(b) - F(a)]\,\Phi'(c) = [\Phi(b) - \Phi(a)]\,F'(c)$$

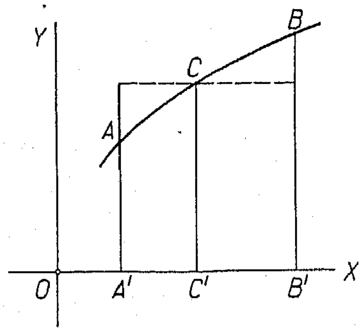
или

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \cdot \varphi(c) = \int_a^b \varphi(x)\,dx \cdot f(c)\,\varphi(c),$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

В частном случае, когда $\varphi(x) = 1$ и, следовательно,



Фиг. 87.

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b dx = b - a,$$

формула (8) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c); \tag{8'}$$

геометрически она очевидна (фиг. 87): кривая трапеция равновелика прямоугольнику с тем же основанием и с высотой, равной промежуточной ординате. Эта теорема может служить геометрическим истолкованием и формулы Лагранжа, так как равенство (8) может быть переписано в таком виде:

$$F(b) - F(a) = (b - a)\,F'(c).$$

ГЛАВА III.

Дифференциальная геометрия.

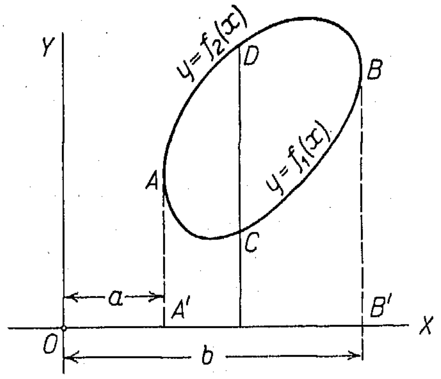
§ 1. Вычисление площадей в декартовых координатах.

Пусть дана площадь (фиг. 88), контур которой $ACBD$ пересекается всякой прямой, параллельной оси Y, в двух точках; площадь ее σ можно представить в виде (алгебраической) суммы площадей кривых трапеций $A'ADBB'$ и $A'ACBB'$ (гл. II, § 1):

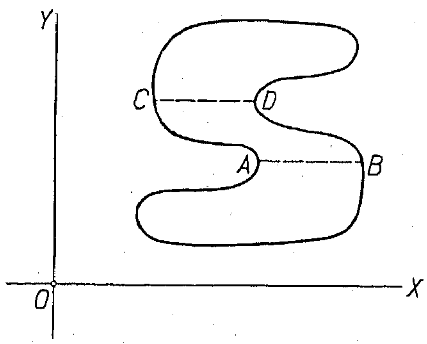
$$\sigma = \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^a f_1(x)\,dx,$$

где $y=f_2(x)$ и $y=f_1(x)$ — уравнения контуров соответственно ADB и ACB.

Так как площадь может быть разбита на несколько площадей с контурами, которые пересекаются со всякой прямой, параллельной



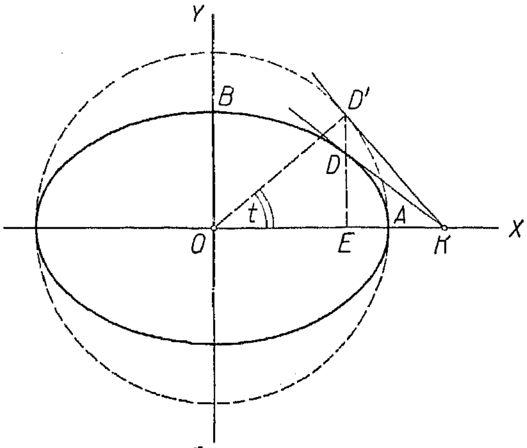
Фиг. 88.



Фиг. 89.

оси Y, в двух точках (фиг. 89), то каждая площадь может быть выражена при помощи одного определенного интеграла или (алгебраической) суммы нескольких определенных интегралов.

ПРИМЕР 1. Эллипс. Для нахождения площади σ эллипса удобнее вычислить площадь его квадранта, например, $OBDA$ (фиг. 90), и, вместо канонического уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, взять параметрические уравнения



Фиг. 90.

$$x=a\cos t, \qquad (1)$$

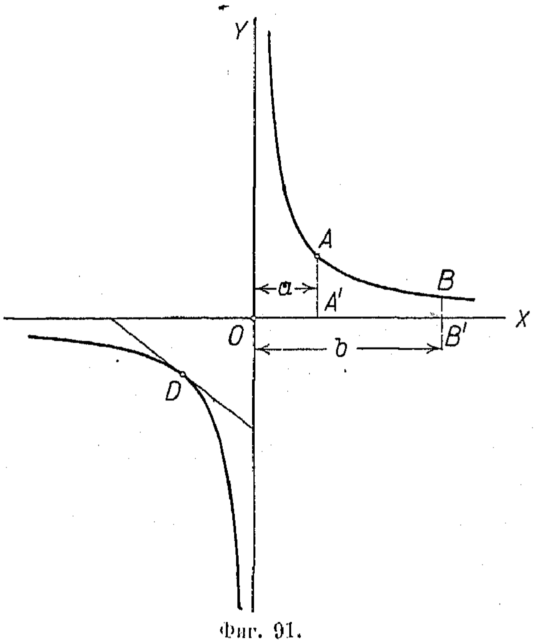
$$y=b\sin t, \qquad (2)$$

другими словами, в интеграле $4\int_0^a y\,dx=\sigma$ произвести замену переменных (1), (2).

Так как $dx=-a\sin t\,dt$ и пределам 0 и a для x соответствуют пределы $\frac{\pi}{2}$ и 0 для t, то

$$\sigma=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\pi ab;$$

в случае круга $a=b$ и, следовательно, $\sigma=\pi a^2$. Величину площади эллипса можно было бы получить обратным путем из площади круга в виду того, что их отношение равно $\frac{b}{a}$ (гл. II, § 6, теор. 1).



Фиг. 91.

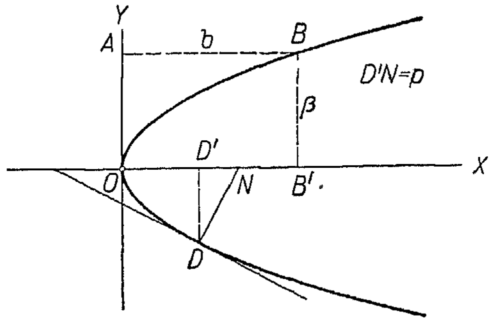
ПРИМЕР 2. Равносторонняя гипербола. Уравнение равносторонней гиперболы (фиг. 91), отнесенной к асимптотам, $xy=m$; площадь σ, ограниченная дугой этой кривой, асимптотой $y=0$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, параллельными другой асимптоте, представится таким образом:

$$\sigma=m\int_a^b\frac{dx}{x}=m\ln\left|\frac{b}{a}\right|;$$

в случае $m=a=1$, $\sigma=\ln|b|$, т. е. мы находим геометрическое истолкование натурального или гиперболического логарифма. Можно было бы определить логарифмическую функцию $\ln b$, как площадь кривой трапеции $A'ABB'$, ограниченную дугой равносторонней гиперболы $xy=1$, отнесенной к асимптотам, асимптотой $y=0$ и двумя прямыми $x=1$ и $x=b$, параллельными другой асимптоте (в случае $b<0$ следует взять прямую $x=-1$, вместо $x=1$), и затем на основании этого определения вывести все свойства логарифмов.

ПРИМЕР 3. Парабола. Площадь σ, ограниченная дугой параболы $y^2=2px$ (фиг. 92), ее осью $y=0$ и перпендикулярной к оси полухордой $x=b$, представится таким образом:

$$\sigma=\sqrt{2p}\int_0^b x^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,b^{3/2}=$$
$$=\frac{2}{3}b\sqrt{2pb}=\frac{2}{3}b\beta=\frac{2}{3}\sigma_1,$$



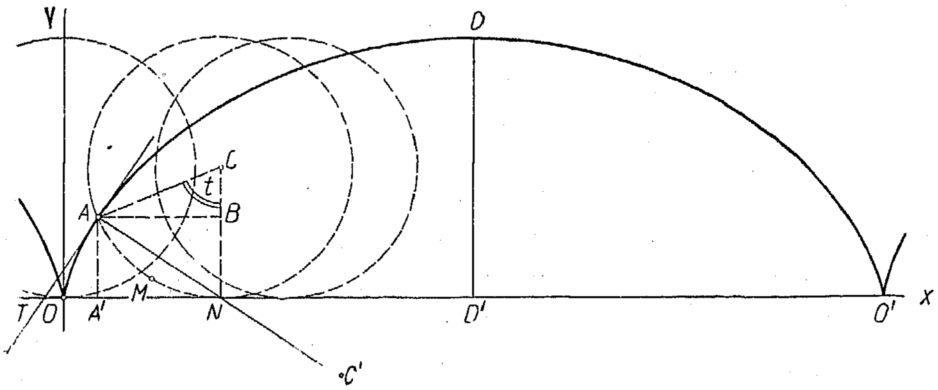
Фиг. 92.

где σ_1 — площадь прямоугольника, построенного на абсциссе $OB'=b$, с высотой, равной $B'B=\beta$.

ПРИМЕР 4. Циклоида. Циклоидой (фиг. 93) называется кривая, описанная точкой A круга, катящегося по прямой без скольжения, так что прямолинейный отрезок ON равен дуге круга AMN.

Примем эту прямую за ось X, а за начало координат — одно из положений на ней подвижной точки $A(x, y)$. Обозначим через t угол, на который откатился круг радиуса r от начального положения в точке O. Тогда $x=OA'=ON-A'N=AMN-AB=rt-r\sin t$, $y=A'A=NB=$ $=NC-BC=r-r\cos t$, откуда

$$x=r(t-\sin t),\quad y=r(1-\cos t).$$



Фиг. 93.

Вычислим площадь σ фигуры $OADO'$; так как она симметрична относительно прямой $x=\pi r$, то

$$\sigma=2r^2\int_0^\pi(1-\cos t)^2\,dt=2r^2\int_0^\pi(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$
$$=r^2\int_0^\pi(3-4\cos t+\cos 2t)\,dt=r^2\Big|_0^\pi\Big(3t-4\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big)=3\pi r^2,$$

т. е. площадь циклоиды равна утроенной площади катящегося круга.

§ 2. Теоремы о пределе суммы бесконечно малых величин.

При изложении вопросов, связанных с приложением интегрального исчисления, большие упрощения часто вносит следующая **теорема** о бесконечно малых величинах: если две суммы состоят из одинакового числа слагаемых одного и того же знака, стремящихся к нулю с неограниченным возрастанием этого числа, и одна из них имеет предел, то этот последний служит пределом и другой суммы при условии, что предел отношения каждого слагаемого первой суммы к соответствующему слагаемому второй равен единице.

Пусть даны две суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_l + \ldots + a_n,$$
$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \ldots + \alpha_l + \ldots + \alpha_n$$

со слагаемыми одного и того же знака, причем $lim S_n = L$,

$$lim \frac{a_1}{\alpha_1} = lim \frac{a_2}{\alpha_2} = \ldots = lim \frac{a_n}{\alpha_n} = 1.$$

Положим $\frac{a_k}{\alpha_k}$ — наименьшее и $\frac{a_l}{\alpha_l}$ — наибольшее из таких отношений. Тогда

$$\frac{a_k}{\alpha_k} < \frac{S_n}{\Sigma_n} < \frac{a_l}{\alpha_l} \text{ *)},$$

и, следовательно (часть первая, § 8, теорема 5), $1 = lim \frac{S_n}{\Sigma_n}$, откуда $1 = \frac{lim S_n}{lim \Sigma_n}$ (часть первая, § 8, теорема 3) или

$$lim \Sigma_n = L.$$

Рассмотрим частный случай, когда $a_1, a_2, \ldots, a_n$—главные части соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (часть вторая, гл. IV, § 1); в этом случае основное условие, что $lim \frac{a_1}{\alpha_1} = lim \frac{a_2}{\alpha_2} = \ldots = lim \frac{a_n}{\alpha_n}$ само собою выполняется, как это вытекает из определения главной части бесконечно малой величины.

На основании этого получаем такое СЛЕДСТВИЕ из только что доказанной теоремы:

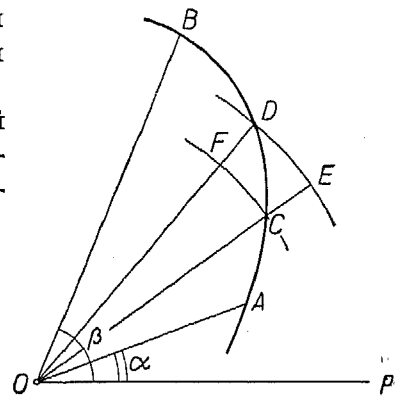
---

*) Положим $\frac{a_k}{\alpha_k} = b$; заменяя в сумме S_n все слагаемые $a_1, a_2, \ldots, a_n$ через $b\alpha_1, b\alpha_2, \ldots, b\alpha_n$, мы ее уменьшаем, так как $b = \frac{a_k}{\alpha_k}$ наименьшее из отношений и, например, $a_1 > b\alpha_1$; следовательно, $S_n > b\alpha_1 + b\alpha_2 + \ldots + b\alpha_n$ или $S_n > b\Sigma_n$, откуда $\frac{S_n}{\Sigma_n} > b$. Точно так же доказывается и второе неравенство $\frac{S_n}{\Sigma_n} < \frac{a_l}{\alpha}$.

предел суммы бесконечно малых величин равен пределу соответствующей суммы главных частей этих бесконечно малых, причем существование одного предела влечет за собою существование другого.

§ 3. Вычисление площадей в полярных координатах.

При вычислении площадей в полярных координатах основной фигурой является не кривая трапеция, а сектор OAB (фиг. 94), ограниченный дугой AB кривой $\varrho = f(\varphi)$ и радиусами-векторами OA и OB, проведенными к концам этой дуги; обозначим его площадь через σ. Пусть амплитуды точек A и B будут соответственно α и β; разделим сектор AOB на n произвольных частей $\Delta\sigma_0$, $\Delta\sigma_1$, . . . , $\Delta\sigma_l$, . . . , $\Delta\sigma_{n-1}$ и рассмотрим площадь $\Delta\sigma_l$ элементарного сектора OCD номера l, так что полярные координаты точек C и D будут соответственно φ_l, ϱ_l и φ_{l+1}, ϱ_{l+1} и угол $COD = \varphi_{l+1} - \varphi_l = \Delta\varphi_l$.



Фиг. 94.

Проведем дуги CF и DE окружностей с центрами в полюсе и с радиусами соответственно ϱ_l и ϱ_{l+1}. Из чертежа (фиг. 94) видно, что

$$OCF < OCD < OED$$

или

$$\frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l < \Delta\sigma_l < \frac{1}{2}(\varrho_l + \Delta\varrho_l)^2\Delta\varphi_l.$$

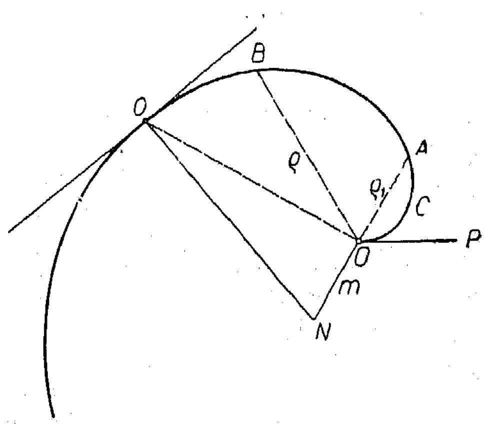
Примем $\Delta\varphi_l$ за главную бесконечно малую; тогда главные части бесконечно малых $\frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l$ и $\frac{1}{2}(\varrho_l + \Delta\varrho_l)^2\Delta\varphi_l = \frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l + \varrho_l\Delta\varrho_l\Delta\varphi_l + \frac{1}{2}(\Delta\varrho_l)^2\Delta\varphi_l$ равны обе $\frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l$; следовательно, главная часть промежуточной $\Delta\sigma_l$ будет тоже равна $\frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l$. На основании следствия теоремы § 2 получаем (гл. II, § 1)

$$\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_l \to 0}} \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha}^{\beta} \Delta\sigma_l =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_l \to 0}} \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\varrho_l^2\Delta\varphi_l = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varrho^2\,d\varphi.$$

Таким образом площадь σ сектора OAB равна

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varrho^2\,d\varphi. \qquad \text{(I)}$$



Фиг. 95.

ПРИМЕР. Архимедова спираль. Определим площадь σ сектора OAB (фиг. 95), ограниченного архимедовой спиралью $\varrho = m\varphi$ и радиусами-векторами ϱ_1 и ϱ с амплитудами α и β.

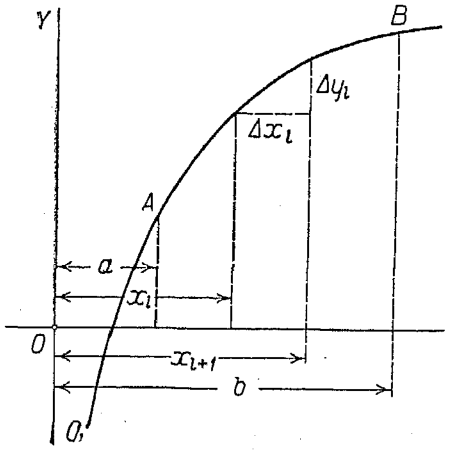
На основании формулы (I) получаем

$$\sigma = \frac{1}{2} m^2 \int_\alpha^\beta \varphi^2 \, d\varphi = \frac{1}{6} m^2 \Big|_\alpha^\beta \varphi^3 = \frac{1}{6} m^2 (\beta^3 - \alpha^3) = \frac{\varrho^3 - \varrho_1{}^3}{6m} ;$$

случаю $\alpha = 0$ и $\varrho_1 = 0$ соответствует сегмент $OCAB$; площадь его равна $\frac{\varrho^3}{6m}$, т. е. площадь сегмента архимедовой спирали, ограниченного пересекающимися в полюсе дугой и стягивающей ее хордой, пропорциональна кубу последней.

§ 4. Длина дуги в декартовых координатах.

Что такое длина дуги AB (фиг. 96), доступно пониманию каждого достаточно представить себе эту дугу в виде нити, которую можно затем вытянуть по прямой; отсюда нахождение длины дуги кривой называется ректификацией (выпрямлением, спрямлением) кривой. Но всего сказанного недостаточно для того, чтобы получить формулу для вычисления длины дуги кривой, и поэтому мы дадим ей такое определение: под длиной дуги кривой условимся разуметь предел периметра вписанной в эту дугу ломаной, у которой число звеньев неограниченно растет, а каждое звено стремится к нулю.



Фиг. 96.

Пусть кривая дана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в интервале (t_0, T), соответствующем дуге AB, и пусть вершинами вписанной ломаной AB служат точки с координатами

$$a = x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0); \; . \; . \; . \; ; \; x_i = \varphi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i);$$
$$x_{i+1} = \varphi(t_{i+1}), \quad y_{i+1} = \psi(t_{i+1}); \; . \; . \; . \; ; \; x_n = b = \varphi(t_n) = \varphi(T), \quad y_n = \psi(T).$$

Тогда периметр вписанной в дугу AB ломаной можно представить таким образом, как сумму ее звеньев:

$$\sqrt{\Delta x_0{}^2 + \Delta y_0{}^2} + \sqrt{\Delta x_1{}^2 + \Delta y_1{}^2} + \; . \; . \; . + \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2} +$$
$$+ \; . \; . \; . + \sqrt{\Delta x^2_{n-1} + \Delta y^2_{n-1}} = \mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T} \sqrt{\Delta x^2_i + \Delta y^2_i} \, .$$

Длина s соответствующей дуги AB, согласно определению, равна пределу этой суммы

$$s = lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{t_0}^{T} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\,. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь такой предел:

$$lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{t_0}^{T} \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} = lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)}\,\Delta t_i\,;$$

этот предел существует, так как

$$lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)}\,\Delta t_i = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt;$$

полученный же интеграл, как взятый от непрерывной функции, существует; отсюда следует (§ 2), что предел (2) тоже существует, и длина дуги

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt\,. \tag{3}$$

Таким образом мы одновременно достигли двух целей: нашли достаточное условие существования предела, при помощи которого определили длину s дуги кривой, и получили формулу (3) для вычисления этой длины. В том случае, если кривая дана уравнением $y = f(x)$, т.-е. в случае $t = x$ и $\psi(x) = f(x)$, формула (3) принимает вид:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{4}$$

Дифференцируем формулы (3) и (4) по верхним пределам, т.-е. соответственно по T и b:

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{\varphi'^2(T) + \psi'^2(T)}, \quad \frac{ds}{db} = \sqrt{1 + f'^2(b)};$$

заменяем T через t и b через x:

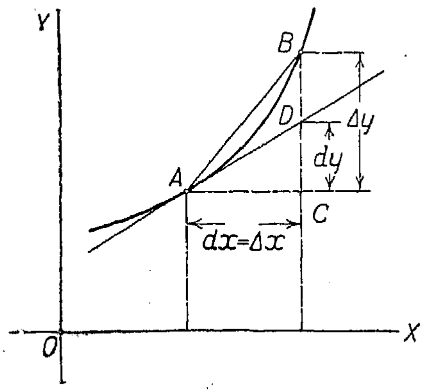
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}, \tag{5}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y_x')^2}. \tag{6}$$

Если подвижная точка A описывает кривую от начала O_1 счета дуг в таком направлении, что параметр t возрастает, то радикал в формуле (5) нужно брать с плюсом, в противном случае—с минусом; то же замечание относится к абсциссе и радикалу в формуле (6). Умножая обе части равенств (5) и (6) соответственно на dt и dx, получаем выражения дифференциала дуги:

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad \text{или} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Геометрический смысл дифференциала дуги (фиг. 97) ясен: он представляет отрезок AD касательной от точки касания A до точки D пересечения с ординатой, соответствующей приращению абсциссы $\Delta x = dx$, так как $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2}$.



Фиг. 97.

Докажем, что **предел отношения бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде равен единице**, т.-е.

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{AB}}{\smile{AB}} = 1.$$

В самом деле,

$$\frac{\overline{AB}}{\smile{AB}} = \frac{\sqrt{AC^2 + CB^2}}{\smile{AB}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}$$

и, следовательно,

$$lim_{AB \to 0} \frac{\overline{AB}}{\smile{AB}} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{ds}{dx}} = 1.$$

Частный случай этой теоремы, когда дуга AB есть дуга круга, доказан во введении в анализ (§ 8, пример 1). В самом деле, в этом случае

$$lim_{AB \to 0} \frac{\overline{AB}}{\smile{AB}} = lim_{\alpha \to 0} \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha} = lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

где 2α есть длина дуги AB окружности.

Согласно определению определенного интеграла (гл. II, § 1),

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \mathop{S}_a^b \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

Выясним геометрический смысл полученной суммы. Так как $f'(\xi_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$, где α_i — угол, образуемый осью X с касательной MP в точке N кривой (фиг. 98), и $\Delta x_i = QP$, то

$$\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}\, \Delta x_i = \frac{\Delta x_i}{\cos \alpha_i} = \frac{QP}{\cos QPM} = MP = \Delta k_i,$$

где Δk_i — отрезок касательной в точке $N\left(\xi_i, f(\xi_i)\right)$, вырезанный на ней прямыми $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$. Таким образом, $s = lim_{\Delta k_i \to 0} \mathop{S}_{i=0}^{n-1} \Delta k_i$, т.-е. длина дуги есть предел описанной около нее прерывной ломаной, состоящей из звеньев A_1Q_1, MP, P_1B_1 (фиг. 98), когда число их неограниченно растет и каждое из них стремится к нулю.

ПРИМЕР 1. Эллипс. Для определения длины s дуги AD эллипса (фиг. 90) удобнее пользоваться параметрическими уравнениями $x = a\cos t$ и $y = b\sin t$, откуда

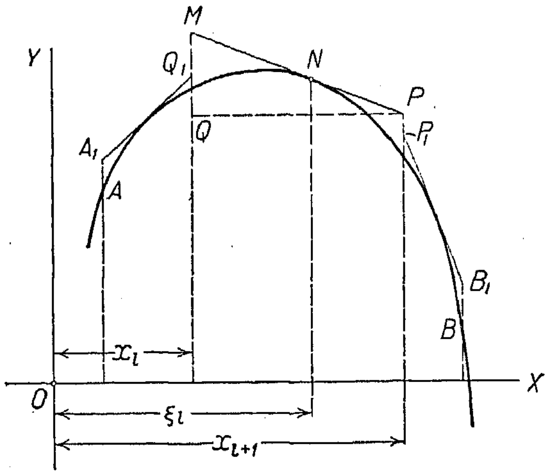
$$dx = -a\sin t\,dt, \qquad dy = b\cos t\,dt,$$

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos t}\,dt$$

или

$$ds = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt,$$

где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса; таким образом,



Фиг. 98.

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt.$$

Интеграл этот представляет неэлементарную функцию, называемую эллиптическим интегралом. Подставляя, вместо x, $-e^2\cos^2 t$ в формулу $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+\vartheta x)^{3/2}}$ (часть вторая, глава V, § 6), получаем

$$s = a\int_0^t \left(1 - \frac{1}{2}e^2\cos^2 t - \frac{1}{8}\frac{e^4\cos^4 t}{(1 - \vartheta e^2\cos^2 t)^{3/2}}\right)dt =$$

$$= a\int_0^t \left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^2\cos 2t\right)dt - \frac{\pi}{8}ae^4 R(t),$$

где

$$R(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\cos^4 t\,dt}{(1 - \vartheta e^2\cos^2 t)^{3/2}};$$

следовательно,

$$s = a\left[t - \frac{1}{4}e^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{\pi}{8}e^4 R(t)\right];$$

для четверти дуги эллипса

$$s = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^4 R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

а для полной дуги

$$= 2\pi a\left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^4 R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Чем ближе эксцентриситет эллипса e к нулю, тем более точные значения длин дуг эллипса дают эти формулы; кроме того, из геометрических соображений (см. фиг. 90) легко видеть, что для полной дуги эллипса s существуют неравенства $2\pi b < s < 2\pi a$. В случае окружности, когда $e=0$, получаем $s=2\pi a$.

Вычисление дуги гиперболы тоже приводит к эллиптическим интегралам.

ПРИМЕР 2. Парабола. Вычислим длину дуги параболы

$$y^2 = 2px$$

(фиг. 92), принимая за независимое переменное ординату:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{y}{p}\right)^2+1}\,dy = \frac{1}{p}\sqrt{y^2+p^2}\,dy$$

и

$$s = \frac{1}{p}\int_0^\beta \sqrt{y^2+p^2}\,dy = \frac{1}{2p}\Big|_0^\beta \left(y\sqrt{y^2+p^2}+p^2\ln|y+\sqrt{y^2+p^2}|\right) =$$

$$= \frac{\beta}{2p}\sqrt{\beta^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\left|\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+p^2}}{p}\right| =$$

$$= \sqrt{b\left(b+\frac{1}{2}p\right)}+\frac{p}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\sqrt{b}+\sqrt{b+\frac{1}{2}p}\right)\right|.$$

ПРИМЕР 3. Циклоида. Из уравнений (§ 1, пример 4) циклоиды (фиг. 93) получаем

$$dx = r(1-\cos t)\,dt = 2r\sin^2\frac{t}{2}\,dt,$$

$$dy = r\sin t\,dt = 2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt,$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = 2r\sin\frac{t}{2}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}\,dt = 2r\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Таким образом, длина s дуги OA циклоиды равна

$$s = 2r\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt = -4r\Big|_0^t \cos\frac{t}{2} = 4r\left(1-\cos\frac{t}{2}\right);$$

для полной ветви циклоиды $t=2\pi$ и $s=8r$, т. е. длина всей ветви циклоиды равна периметру квадрата, описанного около катящегося круга

§ 5. Длина дуги в полярных координатах.

Для определения длины s дуги AB (фиг. 94) кривой $\varrho = f(\varphi)$ в полярных координатах преобразуем выражение дифференциала дуги $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, полагая $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$; в результате вычислений (часть вторая, гл. VI, § 7, пример 1) получаем $ds=\sqrt{\varrho^2 d\varphi^2+d\varrho^2}$ или $ds=\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi$, где $\varrho'=f'(\varphi)$. Таким образом,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi.$$

ПРИМЕР. Архимедова спираль. В случае архимедовой спирали $\varrho = m\varphi$ (фиг. 95): $\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2} = m\sqrt{\varphi^2+1}$ и длина s дуги AB равна

$$s = m\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \frac{1}{2}m\Big|_\alpha^\beta\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\,|\right).$$

Если начало дуги находится в полюсе, то

$$s = \frac{1}{2}m\Big|_0^\beta\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\,|\right)$$

или

$$s = \frac{1}{2}m\left(\beta\sqrt{\beta^2+1} + \ln|\beta+\sqrt{\beta^2+1}\,|\right).$$

§ 6. Касательная в декартовых координатах.

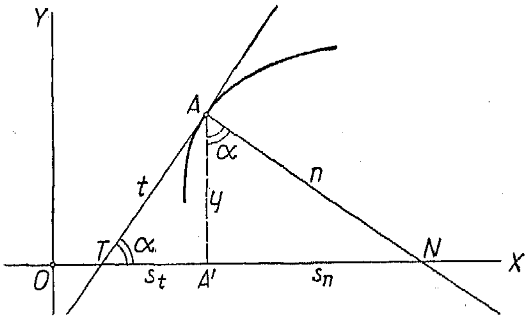
Так как угловой коэффициент k касательной в точке $A(x, y)$ (фиг. 99) кривой $y = f(x)$ равен $f'(x)$ (часть вторая, гл. I, § 1), то уравнение ее, как прямой, проходящей через точку $A(x, y)$ по данному направлению $f'(x)$, будет такое:

$$Y - y = f'(x)\,(X - x)$$

или

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy},$$

где X и Y обозначают текущие координаты.



Фиг. 99.

Так как нормалью называется прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, то нормаль представится уравнением:

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x) \quad \text{или} \quad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0.$$

В случае, если кривая дана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, то уравнения касательной и нормали примут соответственно такой вид:

$$\frac{X-x}{x_t'} = \frac{Y-y}{y_t'}, \quad (X-x)\,x_t' + (Y-y)\,y_t' = 0.$$

Вычислим теперь $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{ds}$$

(§ 4) и

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds}.$$

Формулы $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ и $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ имеют место при условии, что за положительное направление касательной принято направление, соответствующее возрастанию параметра t и, следовательно, направлению возрастающих дуг.

В целом ряде вопросов геометрии и механики играют большую роль отрезки, связанные с касательной и нормалью: касательная t (отрезок касательной от точки касания до оси X), нормаль n (отрезок нормали от точки касания до оси X), подкасательная или субтангенс s_t (проекция касательной на ось X) и субнормаль s_n (проекция нормали на ось X); все эти отрезки можно выразить через ординату точки касания при помощи формул прямоугольного треугольника:

$$t = \frac{y}{\sin\alpha} = y\frac{ds}{dy}, \qquad n = \frac{y}{\cos\alpha} = y\frac{ds}{dx},$$
$$s_t = y\operatorname{ctg}\alpha = y\frac{dx}{dy}, \qquad s_n = y\operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx}$$

(фиг. 99, треугольники TAA' и $AA'N$).

ПРИМЕР 1. Эллипс. В случае канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (фиг. 90), угловой коэффициент касательной определится из уравнения $2\frac{x}{a^2}+2\frac{y}{b^2}y'=0$, так что уравнение касательной принимает вид

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x) \quad \text{или} \quad \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

т.-е.

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1.$$

Длина s_t подкасательной EK (фиг. 90) выразится таким образом: $s_t=\frac{y}{y'}=-\frac{a^2y^2}{b^2x}=x-\frac{a^2}{x}$. В случае окружности $x^2+y^2=a^2$ длина подкасательной $s_t=-\frac{y^2}{x}=x-\frac{a^2}{x}$; следовательно, подкасательные для соответственных, т.-е. с одной и той же абсциссой x, точек D и D' эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и окружности $x^2+y^2=a^2$ равны; отсюда получается простое построение касательной к эллипсу, на которое было уже указано в дифференциальном исчислении (гл. I, § 4, теорема 9).

ПРИМЕР 2. Равносторонняя гипербола. В случае равносторонней гиперболы $xy=m$, отнесенной к асимптотам (фиг. 91), угловой коэффициент k касательной в точке $A(x, y)$ определится из уравнения $y+x\frac{dy}{dx}=0$, так что уравнение касательной будет

$$Y-y=-\frac{y}{x}(X-x) \quad \text{или} \quad \frac{X}{2x}+\frac{Y}{2y}=1.$$

Вычислим длину t касательной:

$$t=y\frac{ds}{dy}=y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}=y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}=y\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}=\sqrt{x^2+y^2};$$

ясно, что отрезок касательной от точки касания до оси Y, благодаря симметрии уравнения $xy=m$ относительно координат, представится тем же самым радикалом $\sqrt{y^2+x^2}$, т.-е. отрезок касательной к гиперболе[1]) между асимптотами делится в точке касания пополам. Таким образом, проведение касательной к гиперболе в точке ее D (фиг. 91) приводится к построению прямой, на которой две данные прямые (асимптоты) отсекают отрезок, делящийся в данной точке (касания) пополам.

ПРИМЕР 3. Парабола. Уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ (фиг. 92) представится таким образом:

$$Y-y=\frac{p}{y}(X-x) \quad \text{или} \quad Yy=p(X-x)+y^2,$$

т.-е.

$$Yy=p(X+x).$$

Вычислим субнормаль: $s_n=yy'=p$, т.-е. субнормаль параболы равна ее параметру; отсюда вытекает простой прием построения касательной к этой кривой в точке ее D.

ПРИМЕР 4. Циклоида. В случае циклоиды (фиг. 93) угловой коэффициент k касательной равен

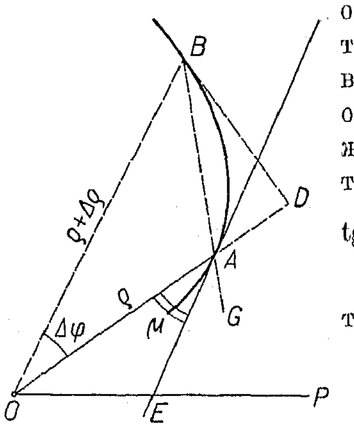
$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{r\sin t\,dt}{r(1-\cos t)\,dt}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

и, следовательно, $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$. Отсюда вытекает прием построения касательной и нормали в точке A (фиг. 93) циклоиды. Соединим точку A с точкой N опоры катящегося круга; получившийся угол ONA измеряется половиной дуги AN и, следовательно, равен $\frac{t}{2}$; перпендикуляр AT к прямой AN и будет касательной, так как угол $NTA=\frac{\pi}{2}-ONA$, т.-е. угол $NTA=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$ или $NTA=\alpha$. Длину n нормали NA можно непосредственно определить как хорду катящегося круга: $n=2r\sin\frac{t}{2}$.

1) Теорема эта, доказанная для равносторонней гиперболы (фиг. 91), верна для любой гиперболы, т.-е. когда асимптоты не перпендикулярны друг к другу и, следовательно, оси координат косоугольные; она может быть доказана непосредственно при помощи чертежа на основании уравнения касательной $\frac{X}{2x}+\frac{Y}{2y}=1$ (Анал. Геом., изд. 2, стр. 120).

§ 7. Касательная в полярных координатах.

Если кривая дана в полярных координатах $\varrho = f(\varphi)$, то направление касательной EA определяется углом $\mu = OAE$ (фиг. 100), который она образует с радиусом-вектором OA, проведенным в точку касания $A(\varphi, \varrho)$. Для нахождения угла μ возьмем на кривой точку $B(\varphi + \Delta\varphi, \varrho + \Delta\varrho)$ и опустим из нее перпендикуляр BD на продолжение радиуса-вектора OA; из прямоугольных треугольников BDA и BDO получаем



Фиг. 100.

$$\operatorname{tg} BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{OD - OA}, \quad BD = (\varrho + \Delta\varrho)\sin\Delta\varphi,$$

$$OD = (\varrho + \Delta\varrho)\cos\Delta\varphi;$$

таким образом

$$\operatorname{tg} BAD = \operatorname{tg} OAG = \frac{(\varrho + \Delta\varrho)\sin\Delta\varphi}{(\varrho + \Delta\varrho)\cos\Delta\varphi - \varrho} =$$

$$= \frac{(\varrho + \Delta\varrho)\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\varrho\dfrac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi} + \dfrac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi}\cos\Delta\varphi}.$$

Перейдем к пределу, предполагая, что точка B неограниченно приближается к точке A; тогда угол OAG перейдет в угол $OAE = \mu$,

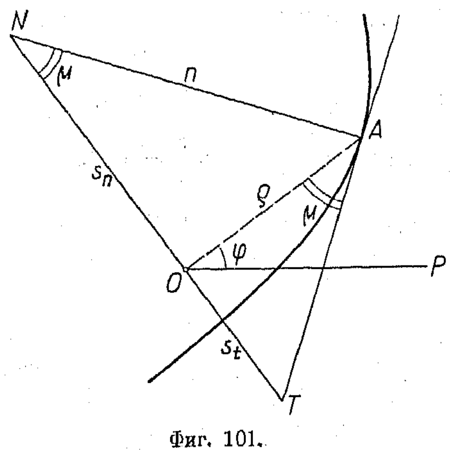
$$lim_{\Delta\varphi\to 0}\Delta\varrho = 0, \quad lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1,$$

$$lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1-\cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = 0,$$

$$lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varphi} = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \varrho', \quad lim_{\Delta\varphi\to 0}\cos\Delta\varphi = 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho}{\varrho'}, \quad \mu = \operatorname{arctg}\frac{\varrho}{\varrho'}.$$



Фиг. 101.

В случае полярной системы координат, как и декартовой, тоже играют большую роль отрезки (фиг. 101): к а с а т е л ь н а я t (отрезок AT касательной от точки касания до пересечения с перпендикуляром NT к радиусу-вектору), н о р м а л ь n (отрезок AN нормали от точки касания до пересечения с перпендикуляром TN к радиусу-вектору), п о д к а с ательная s_t (проекция OT касательной на перпендикуляр NT к радиусу-вектору) и субнормаль s_n (проекция ON нормали на перпендикуляр NT к радиусу-вектору). Пользуясь формулами прямоугольного треугольника, получаем:

$$t = \frac{\varrho}{\cos\mu} = \varrho\frac{ds}{d\varrho}, \quad n = \frac{\varrho}{\sin\mu} = \frac{ds}{d\varphi}, \quad s_t = \varrho\,\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\varrho^2}{\varrho'}, \quad s_n = \varrho\,\mathrm{ctg}\,\mu = \varrho'$$

(фиг. 101, треугольники OAT и OAN), так как

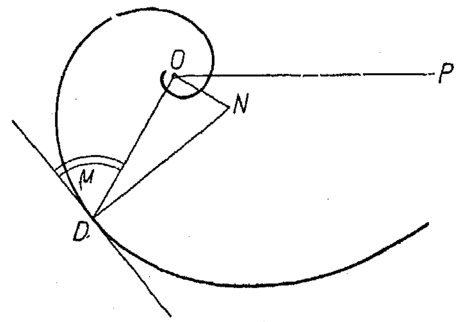
$$\cos\mu = \frac{\cos\mu}{\sqrt{\cos^2\mu + \sin^2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\varrho^2}{\varrho'^2}}} = \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2+\varrho^2}} = \frac{d\varrho}{ds},$$

$$\sin\mu = \mathrm{tg}\,\mu\cos\mu = \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{ds} = \varrho\frac{d\varphi}{ds}.$$

ПРИМЕР 1. Спираль Архимеда. Вычислим субнормаль спирали Архимеда $\varrho = m\varphi$ (фиг. 95): $s_n = \varrho' = m$, т.-е. субнормаль равна параметру спирали; это свойство дает возможность построить нормаль, а следовательно, и касательную к спирали Архимеда в точке ее D (фиг. 95).

ПРИМЕР 2. Логарифмическая спираль. Вычислим угол μ образуемый касательной с радиусом-вектором. Для логарифмической спирали $\varrho = e^{m\varphi}$ (фиг. 102):

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{e^{m\varphi}}{me^{m\varphi}} = \frac{1}{m},$$

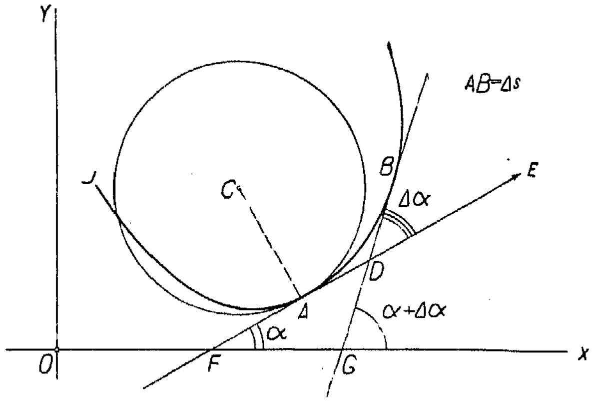


Фиг. 102.

т.-е. касательная к логарифмической спирали образует с радиусом-вектором, проведенным в точку касания, постоянно один и тот же угол $\mu = \mathrm{arctg}\frac{1}{m}$. Отсюда получается простой прием построения касательной в точке D спирали.

§ 8. Радиус кривизны в декартовых координатах.

Отличие кривой от прямой состоит в том, что кривая в каждой своей точке меняет направление, которое, как мы видели (§ 6), указывается направлением касательной в этой точке. Легко видеть (фиг. 103), что искривление дуги AB кривой, т.-е. кривизна ее, характеризуется углом BDE между двумя касательными AD и DB в концах A и B этой дуги: чем этот угол больше, тем кривизна больше, и обратно — чем этот угол меньше, тем и кривизна меньше; угол BDE равен углу FDG и, следовательно, разности углов XGD и GFD, т.-е. равен приращению $\Delta\alpha$ угла касательной с осью X, получающемуся от перемещения касательной из положения AE в положение DB. Отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ угла $\Delta\alpha$, характеризующего кривизну дуги AB, к ее длине Δs даст среднюю кривизну дуги AB. Чем ближе возьмем точку B к точке A, т.-е. чем мень-

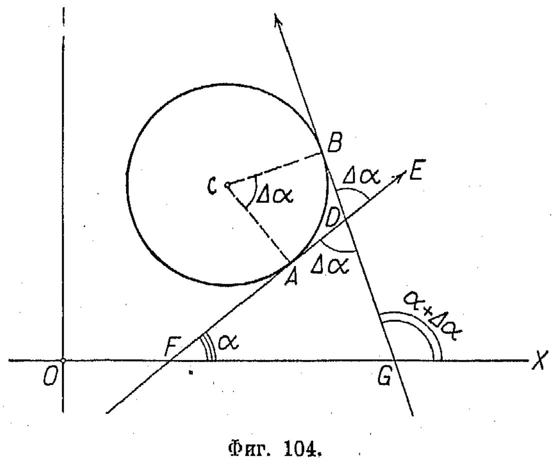


Фиг. 103.

ше будет дуга AB, тем точнее средняя кривизна $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ будет давать приближенное значение кривизны K кривой в точке A; на основании этого совершенно естественно положить

$$K = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Определим кривизну K простейшей кривой—окружности (фиг. 104).



Фиг. 104.

В этом случае длина дуги AB $\Delta s = R\Delta\alpha$, где R радиус круга, так как центральный угол ACB равен $\Delta\alpha$. Следовательно,

$$K = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R},$$

т.-е. кривизна окружности во всех точках одна и та же и равна обратной величине ее радиуса. Этого и следовало ожидать. В самом деле, через точки A и B проведем окружности различных радиусов [фиг. 3 (стр. 12)]; легко видеть, что, чем больше радиус окружности, тем менее дуга ее AB отличается от хорды AB и, следовательно, тем меньше ее кривизна. Ввиду этого совершенно естественно и в общем случае ввести, вместо кривизны кривой K в данной ее точке, обратную величину — радиус кривизны

$$R=\frac{1}{K}=lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}. \qquad (1)$$

Таким образом, **радиусом кривизны кривой в данной ее точке называется радиус окружности, кривизна которой равна кривизне кривой в этой точке.**

Радиус кривизны будем рассматривать как вектор, откладывая его по нормали от точки касания A в сторону вогнутости кривой; конечная точка C (фиг. 103) радиуса кривизны называется **центром кривизны**, а круг, описанный из центра кривизны радиусом, равным радиусу кривизны, — **кругом кривизны** кривой в точке A.

Если возьмем на кривой, кроме точки A, еще какие-нибудь две, напр., B и J, и проведем через эти три точки окружность, то эта окружность будет вполне определенная. Предположим теперь, что точки B и J стали перемещаться по кривой по направлению к точке A. Окружность будет изменяться, и каждому определенному расположению точек B и J будет соответствовать свой вполне определенный круг, а поэтому и в пределе, когда точки B и J сольются с A, окружность займет, вообще говоря, вполне определенное же положение; эта предельная окружность среди окружностей, проходящих через точку A, играет ту же самую роль, что касательная в точке A среди прямых, пересекающих кривую в этой точке, и поэтому называется **соприкасающимся кругом.**

Если на основании определения соприкасающегося круга найти его радиус и координаты центра, то окажется, что он совпадает с кругом кривизны. Поэтому **круг кривизны называется также соприкасающимся кругом.**

Так как

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

и

$$d\alpha=d\left(\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^2+dy^2},$$

то

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}. \qquad (2)$$

Положим теперь, что кривая дана параметрическими уравнениями

$x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Преобразуем для этого случая выражение радиуса кривизны; разделим числителя и знаменателя формулы (2) на dt^3:

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}, \tag{3}$$

где

$$x'=\varphi'(t);\quad y'=\psi'(t),\quad x''=\varphi''(t);\quad y''=\psi''(t).$$

Если кривая дана уравнением $y=f(x)$, т.-е. абсцисса принимается за независимое переменное, то $x'=1$, $x''=0$ и

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{3'}$$

где

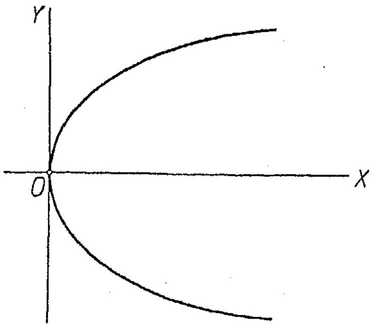
$$y'=f'(x) \quad \text{и} \quad y''=f''(x).$$

Формула (3′) показывает, что в точке, где $y''=0$, $R=\infty$, т.-е. кривая, подобно прямой, имеет кривизну в этой точке, равную нулю. Большею частью это происходит тогда, когда кривая в соответствующей точке имеет точку перегиба.

ПРИМЕР 1. Кривая 2-го порядка. Если кривая 2-го порядка отнесена к вершине, т.-е. за начало координат принята вершина, за ось Y — касательная в ней, а за ось X — фокальная ось (фиг. 105), то уравнение ее принимает вид

$$y^2=2px+qx^2, \tag{1}$$

где $q=e^2-1$ и e — эксцентриситет; в случае эллипса и гиперболы параметр $p=\frac{b^2}{a}$ (Ан. Геом., изд. 2-е, стр. 127).



Фиг. 105.

Докажем, что если за ось X принята фокальная ось кривой 2-го порядка, то абсолютная величина радиуса кривизны равна частному от деления куба нормали на квадрат параметра. В самом деле,

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\frac{s'^3}{y''};$$

так как $n=ys'$ (§ 6), то

$$R=\frac{n^3}{y^3y''};$$

с другой стороны, $y^3y''=-p^2$, так как, дифференцируя уравнение (1) два раза, получаем: $2yy'=2p+2qx$ и $yy''+y'^2=q$, откуда

$$yy''=q-y'^2=q-\frac{(p+qx)^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}[q(2px+qx^2)-(p+qx)^2]=-\frac{p^2}{y^2};$$

таким образом,

$$|R| = \frac{n^3}{p^2}.$$

ПРИМЕР 2. Циклоида. Покажем, что абсолютная величина радиуса кривизны циклоиды (фиг. 93) вдвое больше нормали. Для этого воспользуемся формулой

$$R = \frac{ds}{d\alpha}; \tag{1}$$

так как $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (§ 6, пример 4) и $ds = 2r\sin\frac{t}{2}dt$ (§ 4, пример 3), то

$$R = \frac{2r\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt} = -4r\sin\frac{t}{2} = -2n$$

(§ 6, пример 4), откуда

$$|R| = 2n = AC' \quad (\text{фиг. } 93).$$

§ 9. Радиус кривизны в полярных координатах.

Полагая $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ и преобразуя формулу (2) § 8 (часть вторая, гл. VI, § 7, III, пример 2), получим

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}. \tag{1}$$

К той же формуле можно прийти проще, если принять во внимание, что $\alpha = \varphi + \mu$ (фиг. 101), так что $R = \frac{ds}{d\varphi + d\mu}$ (§ 8, формула 1); ввиду того, что

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{\varrho}{\varrho'} \quad (\S\ 7)$$

и

$$d\mu = d\left(\operatorname{arctg}\frac{\varrho}{\varrho'}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho'^2}} \cdot \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2}\, d\varphi = \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\varphi,$$

получаем

$$d\varphi + d\mu = \left[1 + \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2}\right] d\varphi = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho'^2 + \varrho^2}\, d\varphi.$$

Так как $ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\varphi$ (§ 5), то в результате приходим к формуле (1).

ПРИМЕР 1. Спираль Архимеда. В случае спирали Архимеда $\varrho = m\varphi$ (фиг. 95), $\varrho' = m$ и $\varrho'' = 0$, так что радиус кривизны

$$R = \frac{(m^2\varphi^2 + m^2)^{3/2}}{m^2\varphi^2 + 2m^2} \quad \text{или} \quad R = m\frac{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2}.$$

Так как $n^2 = \varrho^2 + s_n{}^2$ (фиг. 101), где n и s_n — полярные нормаль и субнормаль, и так как для спирали Архимеда $s_n = m$ (§ 7, пример 1), то

$$n = m(\varphi^2 + 1)^{1/2} \quad \text{и} \quad R = \frac{n^3}{n^2 + m^2}.$$

ПРИМЕР 2. Логарифмическая спираль. Покажем, что радиус кривизны R логарифмической спирали $\varrho = e^{m\varphi}$ (фиг. 102) равен нормали.

В самом деле, в этом случае $R = \dfrac{ds}{d\varphi}$, так как $d\mu = 0$ (§ 7, прим. 2); с другой стороны, нормаль $n = \dfrac{ds}{d\varphi}$ (§ 7); следовательно, $R = n$; на основании этого получается простое построение радиуса кривизны в точке D логарифмической спирали (фиг. 102): точка пересечения N перпендикуляров ON и DN соответственно к радиусу-вектору и к касательной есть центр кривизны, а длина нормали DN — радиус кривизны.

Так как

$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\,d\varphi = \varrho\sqrt{1 + m^2}\,d\varphi,$$

то

$$R = n = \varrho\sqrt{1 + m^2}.$$

ГЛАВА IV.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

1. Основные понятия.

Возьмем семейство парабол, отнесенных к их общей вершине, (фиг. 106)

$$y^2 = Cx, \tag{1}$$

где C — произвольное постоянное, и найдем какое-нибудь свойство, общее этим параболам, не зависящее от значения параметра C; последний, следовательно, надо исключить, но для этого — одного уравнения (1) мало: необходимо иметь еще одно уравнение; для этого продифференцируем обе части уравнения (1):

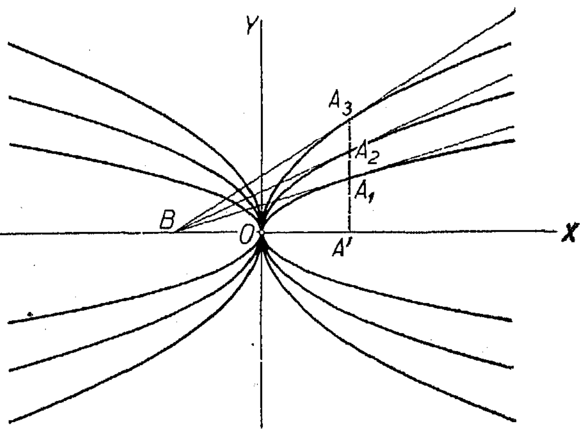
$$2y\frac{dy}{dx} = C. \tag{2}$$

Исключаем теперь произвольное постоянное C из этих двух уравнений:

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}x$$

или

$$2x\frac{dy}{dx} = y. \tag{3}$$



Фиг. 106.

Уравнение (3) называется **дифференциальным**, а уравнение (1) — его **общим интегралом**; давая произвольному постоянному C какое-нибудь частное значение, например, 8, получаем **частный интеграл**: $y^2 = 8x$. Геометрический смысл уравнения (3) состоит в том, что касательные в тех точках A_1, A_2, A_3, . . . парабол семейства (1), которые расположены на одной прямой, перпендикулярной к их общей оси, пересекают эту ось в одной и той же точке B. В самом деле, уравнению (3) соответствуют равенства:

$$BA'\operatorname{tg} A'BA_1 = A'A_1, \quad BA'\operatorname{tg} A'BA_2 = A'A_2, \quad BA'\operatorname{tg} A'BA_3 = A'A_3, \ldots$$

Таким образом, **дифференциальным уравнением 1-го порядка** $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ **называется равенство, связующее аргумент, функцию и ее первую производную. Функция** $y=\varphi(x, c)$, **удовлетворяющая дифференциальному уравнению 1-го порядка, т.-е. обращающая его в тождество и содержащая произвольное постоянное, называется его общим интегралом.**

Интегралом дифференциального уравнения 1-го порядка называется также и уравнение $\Phi(x, y, C)=0$, связующее произвольное постоянное, аргумент и интеграл в точном значении этого слова.

Например, уравнение (1) называется интегралом дифференциального уравнения (3), так как, подставляя в последнее, вместо y, интеграл в точном значении этого слова, т.-е. $\sqrt{Cx}$, получим тождество:

$$2x\frac{\sqrt{C}}{2\sqrt{x}}=\sqrt{Cx}.$$

Возьмем в качестве второго примера семейство синусоид

$$y=C_1\sin(ax+C_2) \tag{4}$$

и исключим произвольные постоянные C_1 и C_2; для этого продифференцируем уравнение (4) два раза:

$$\frac{dy}{dx}=aC_1\cos(ax+C_2), \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-a^2C_1\sin(ax+C_2)=-a^2y,$$

т.-е. в результате исключения получаем дифференциальное уравнение **второго** порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0, \tag{5}$$

общий интеграл которого (4) содержит **два** произвольных постоянных.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые разделением переменных.

Пусть дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

разрешимо относительно производной: $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ разлагается на два множителя, из которых один содержит только x, а другой только y; обозначим их через $f_1(x)$ и $\frac{1}{f_2(y)}$, так что

$$f(x,y)=f_1(x)\frac{1}{f_2(y)} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x)}{f_2(y)}.$$

Отделяем друг от друга переменные x и y или, как говорят, разделяем их:

$$f_2(y)\,dy=f_1(x)\,dx.$$

Так как начальные функции левой и правой части этого равенства могут разниться только на постоянное C, то получаем интеграл данного дифференциального уравнения в таком виде:

$$\int f_2(y)\,dy=\int f_1(x)\,dx+C.$$

Среди уравнений, интегрируемых разделением переменных, представляет особый интерес так называемое линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0; \tag{6}$$

оно называется линейным, потому что содержит функцию и ее производную только в первой степени; название однородного оно получило ввиду того, что оба члена его одной и той же степени—именно первой—относительно функции и ее производной. В уравнении (6) переменные разделяются очень просто:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\,dx;$$

отсюда по интегрировании

$$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+C.$$

Преобразуя полученный общий интеграл путем потенцирования и полагая при этом для удобства $C=\ln|C_1|$, получаем

$$y=C_1e^{-\int p(x)dx}$$

или, по удалении значка при произвольном постоянном,

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

ПРИМЕР 1. $2x\dfrac{dy}{dx}=y$.

Разделяем переменные в этом линейном однородном уравнении: $2\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$, откуда по интегрировании $2\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$ или

$$y^2=Cx.$$

ПРИМЕР 2. $\frac{dy}{dx}=y$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y}=dx$, откуда $\ln|y|=x+\ln|C|$ или

$$y=Ce^x.$$

ПРИМЕР 3. $(1+x)\frac{dy}{dx}=my$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{y}=m\frac{dx}{1+x}$, откуда $\ln|y|=m\ln|1+x|+$ $+\ln|C|$, или

$$y=C(1+x)^m.$$

Рассмотрим теперь пример однородного дифференциального уравнения относительно функции и аргумента; это уравнение относится к классу таких, которые требуют предварительных преобразований, прежде чем применить к ним метод разделения переменных.

ПРИМЕР 4. Найти кривую, у которой сумма субтангенса и субнормали равна удвоенной абсциссе.

Согласно условию, $s_t+s_n=2x$; с другой стороны (гл. III, § 6), $s_t=y\frac{dx}{dy}$ и $s_n=y\frac{dy}{dx}$ [фиг. 99 (стр. 137)]; следовательно, $y\frac{dx}{dy}+y\frac{dy}{dx}=2x$, откуда

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

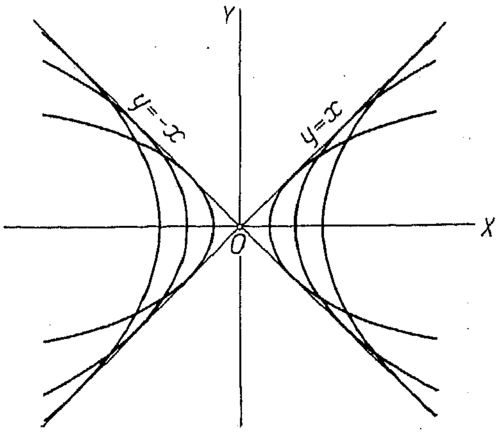
Решаем это квадратное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}. \tag{7}$$

В правой части стоит однородное выражение относительно функции y и аргумента x; в самом деле, полагая $y=tx$ (8), получаем $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}=\frac{(1+\sqrt{1-t^2})x}{tx}=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$; чтобы уравнение (7) можно было интегрировать разделением переменных, как оказывается, надо предварительно воспользоваться подстановкой (8); для этого находим производную: $\frac{dy}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t$; следовательно, уравнение (7) принимает такой вид: $x\frac{dt}{dx}+t=\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$ или $x\frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{1-t^2}+1-t^2}{t}$. Разделяем переменные: $\frac{dx}{x}-\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}(1+\sqrt{1-t^2})}=0$ или $\frac{dx}{x}+\frac{d(1+\sqrt{1-t^2})}{1+\sqrt{1-t^2}}=0$, откуда по интегрировании $\ln|x|+\ln|1+\sqrt{1-t^2}|=\ln|C|$ или после потенцирования $x(1+\sqrt{1-t^2})=C$; исключаем переменное t при помощи подстановки (8): $x+\sqrt{x^2-y^2}=C$; освобождаем уравнение от радикала:

$$y^2=2Cx-C^2; \tag{9}$$

если представить уравнение (9) в таком виде: $y^2 = 2C\left(x - \frac{C}{2}\right)$, то легко сообразить, что это—уравнение семейства парабол с общей осью (ось X) и с общей директрисой (ось Y); все эти параболы касаются биссектрис координатных углов, т.-е. прямых $y = x$ и $y = -x$. В самом деле, решая эти уравнения совместно с уравнением (9) семейства, получаем равные корни: $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = C$, или $x_1 = x_2 = -y_1 = -y_2 = C$. Полагая в дифференциальном уравнении (7) $y = x$ и $y = -x$, получаем тождества: $1 = 1$ и $-1 = -1$; следовательно, $y = x$ и $y = -x$ интегралы уравнения (7); это не общие интегралы, так как не содержат произвольного постоянного; они также и не частные интегралы, так как какое бы частное значение мы ни задавали произвольному постоянному C в уравнении (9), т.-е. в общем интеграле, никогда не получим $y = x$ или $y = -x$. Поэтому эти интегралы называются **особыми**; соответствующие прямые, как мы видели, касаются всех парабол (9), представляющих семейство интегральных кривых, и называются **огибающими** этого семейства.



Фиг. 107.

§ 3. Дифференциальные уравнения второго порядка.

Рассмотрим несколько примеров на интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка, особенно часто встречающихся при решении вопросов прикладного характера. Что дифференциальные уравнения именно второго порядка должны иметь приложения на практике, этого и следовало ожидать, так как сила равна произведению массы на ускорение, а ускорение, с точки зрения анализа, есть вторая производная от пространства по времени. Все примеры, которые мы будем рассматривать, представляют частный случай линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x), \tag{10}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, вообще говоря, некоторые функции от x; если член, не содержащий функции и ее производных, равен нулю, т.-е. $r(x) = 0$, то уравнение (10) называется **однородным** линейным дифференциальным уравнением. В дальнейшем (§ 4) будет доказано, что если известен частный интеграл Y уравнения (10), т.-е. если известна функция Y, обращающая уравнение (10) в тождество

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + p(x)\frac{dY}{dx} + q(x)Y = r(x),$$

то при помощи подстановки $y = z + Y$ неоднородное уравнение (10) преобразуется в однородное

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0. \tag{11}$$

Таким образом, основным вопросом является интегрирование линейного однородного дифференциального уравнения (11).

Рассмотрим прежде всего частный случай уравнения (10), когда коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ равны нулю.

I. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(x)$.

Ввиду того, что вторая производная есть производная первой производной, т.-е. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, все сводится к двукратному интегрированию:

$$\frac{dy}{dx} = \int r(x)\,dx + C_1, \quad y = \int\left[\int r(x)\,dx\right]dx + C_1x + C_2.$$

Так как $\dfrac{d}{dx}\left[x\int r(x)\,dx - \int x\,r(x)\,dx\right] = \int r(x)\,dx$, то

$$y = x\int r(x)\,dx - \int x\,r(x)\,dx + C_1x + C_2.$$

ПРИМЕР 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\sin x$; отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C_1,$$

$$y = \int(-x\cos x + \sin x + C_1)\,dx = -x\sin x - 2\cos x + C_1x + C_2.$$

ПРИМЕР 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = g$; отсюда

$$\frac{dy}{dx} = gx + C_1 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2}gx^2 + C_1x + C_2.$$

Если под x и y разуметь соответственно время и расстояние, то полученный интеграл представляет закон равномерно ускоренного (или замедленного) движения, где g — ускорение, а C_1 и C_2 определяют скорость и положение движущейся точки, когда время x равно нулю.

II. Дифференциальное уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} + my = 0$.

Разберем два случая: $m = a^2 > 0$ и $m = -a^2 < 0$.

1. Интегралом уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0, \tag{5}$$

как мы видели (§ 1, пример 2), служит функция

$$y = A\sin(ax + \gamma), \tag{4}$$

где A и γ — произвольные постоянные; если под x разуметь время, а под y — расстояние, то интеграл (4) представляет гармоническое колебательное движение с амплитудой A, начальной фазой γ и периодом $\frac{2\pi}{a}$.

Легко видеть, что интеграл можно представить в таком виде:

$$y = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax), \tag{12}$$

где $C_1 = A\cos\gamma$ и $C_2 = A\sin\gamma$; полагая последовательно $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$, $C_1 = 1$, получаем $y = \sin(ax)$ и $y = \cos(ax)$, т.-е. функции $\sin(ax)$ и $\cos(ax)$, на которые множатся произвольные постоянные C_1 и C_2, суть частные интегралы уравнения (5).

2. Последний результат указывает на то, что общий интеграл уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = 0 \tag{13}$$

должен иметь такой вид: $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где y_1 и y_2 — частные интегралы; чтобы определить их, примем во внимание, что $\frac{d^n}{dx^n}(e^{rx}) = r^ne^{rx}$ и, в частности, $\frac{d^2}{dx^2}(e^{rx}) = r^2e^{rx}$ или $\frac{d^2e^{rx}}{dx^2} - r^2e^{rx} = 0$; сопоставляя эту формулу с уравнением (13), видим, что последнее обращается в тождество, если положить $y = e^{rx}$ и $r^2 = a^2$, откуда

$$r_1 = a \quad \text{и} \quad y_1 = e^{ax}, \qquad r_2 = -a \quad \text{и} \quad y_2 = e^{-ax}.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (13) имеет такой вид:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \tag{14}$$

Таким образом интегрирование уравнения (13) свелось к решению уравнения $r^2 - a^2 = 0$; это уравнение называется *характеристическим*; в случае уравнения (5), характеристическое уравнение $r^2 + a^2 = 0$.

Если рассматривают механическую задачу и под x и y разумеют соответственно время и расстояние, то постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий, например, из таких, что в начальный момент, при $x = 0$, движущаяся точка находится в положении y_0 и имеет скорость v_0; подставляя эти значения в уравнения (14) и $\frac{dy}{dx} = a(C_1e^{ax} - C_2e^{-ax})$, получаем $y_0 = C_1 + C_2$ и $\frac{v_0}{a} = C_1 - C_2$, откуда $C_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0}{a}$ и $C_2 = \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0}{a}$. Тогда уравнение (14) принимает такой вид:

$$y = y_0 \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + \frac{v_0}{a}\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2};$$

так как $\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=\cosh(ax)$ и $\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}=\sinh(ax)$ — гиперболические косинус и синус (гл. I, § 6, V, пример 4), то окончательно

$$y=y_0\cosh(ax)+\frac{v_0}{a}\sinh(ax).$$

Легко видеть, что интеграл уравнения (5) при тех же условиях примет такой вид:

$$y=y_0\cos(ax)+\frac{v_0}{a}\sin(ax).$$

III. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2p\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{15}$$

где p и q — постоянные.

Полагая в этом уравнении, на основании только что приведенных рассуждений, $y=e^{rx}$, получаем

$$e^{rx}[r^2+2pr+q]=0 \text{ или } r^2+2pr+q=0;$$

это уравнение, как мы видели, называется характеристическим.

1. Рассмотрим сперва случай действительных корней: $r_1=-p+a$ и $r_2=-p-a$, где $a=\sqrt{p^2-q}$; тогда частными интегралами будут функции $y_1=e^{-px+ax}$ и $y_2=e^{-px-ax}$, а общим интегралом

$$y=C_1y_1+C_2y_2=e^{-px}(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}). \tag{16}$$

2. Чтобы получить выражение общего интеграла для случая мнимых корней $r_1=-p+ai$ и $r_2=-p-ai$, где $a=\sqrt{q-p^2}$, заметим, что в рассмотренном раньше более простом примере II переходу от действительных корней характеристического уравнения к мнимым соответствовала замена в выражении общего интеграла (14) двучлена $C_1e^{ax}+$ $+C_2e^{-ax}$ двучленом

$$C_1\sin(ax)+C_2\cos(ax); \tag{12}$$

так как интеграл (16) отличается от (14) только множителем e^{-px}, то искомый общий интеграл представляется в таком виде:

$$y=e^{-px}[C_1\sin(ax)+C_2\cos(ax)]. \tag{17}$$

Для того, чтобы убедиться, что выражение (17) действительно служит интегралом уравнения (15), надо подставить его в это уравнение и удостовериться, что в результате подстановки получается тождество.

IV. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=b. \tag{18}$$

Легко сообразить, что частный интеграл этого уравнения — постоянное. В самом деле, обозначая его через A, получаем $a^2A = b$, так как $\frac{d^2A}{dx^2} = 0$; отсюда $A = \frac{b}{a^2}$. Введем новую функцию z, полагая $y = z + \frac{b}{a^2}$; тогда уравнение (18) принимает вид: $\frac{d^2z}{dx^2} + a^2\left(z + \frac{b}{a^2}\right) = b$ или $\frac{d^2z}{dx^2} + a^2z = 0$. Следовательно (12),

$$z = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) \quad \text{и} \quad y = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + \frac{b}{a^2}. \tag{19}$$

V. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = b \sin(gx + h). \tag{20}$$

Попробуем, не является ли частным интегралом неоднородного уравнения (20) функция $A \sin(gx + h)$, где A — некоторое постоянное, которое, как и в примере IV, мы определим при помощи подстановки в это уравнение: $-Ag^2 \sin(gx + h) + a^2A \sin(gx + h) = b \sin(gx + h)$, откуда $A = \frac{b}{a^2 - g^2}$. Повторяя рассуждения предыдущего примера, получаем общий интеграл уравнения (20) в таком виде:

$$y = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + \frac{b}{a^2 - g^2} \sin(gx + h). \tag{21}$$

VI. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k\frac{dy}{dx} = g. \tag{22}$$

Легко сообразить, что частный интеграл этого уравнения равен $\frac{g}{k}x$, так как $\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{k}x\right) = \frac{g}{k}$, $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{g}{k}x\right) = 0$ и, следовательно, уравнение (22) обращается в тождество $k\frac{g}{k} = g$. Полагая, как и в предыдущих примерах, $y = z + \frac{g}{k}x$, получаем

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(z + \frac{g}{k}x\right) + k\frac{d}{dx}\left(z + \frac{g}{k}x\right) = g \quad \text{или} \quad \frac{d^2z}{dx^2} + k\frac{dz}{dx} = 0.$$

Путем подстановки $z = e^{rx}$ получаем характеристическое уравнение $r^2 + kr = 0$, откуда $r_1 = -k$, $r_2 = 0$ и общий интеграл $z = C_1e^{-kx} + C_2$; следовательно,

$$y = C_1e^{-kx} + C_2 + \frac{g}{k}x. \tag{23}$$

Чтобы быть в состоянии вполне ориентироваться в только что изложенных методах интегрирования линейных дифференциальных уравнений, надо знать их общую теорию; к изложению ее мы и переходим, взяв для конкретности уравнение второго порядка.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения.

Теорема I. Если функции y_1 и y_2 — интегралы однородного линейного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{11}$$

то и функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{24}$$

также интеграл этого уравнения.

Продифференцируем равенство (24) два раза:

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2},$$

и подставим выражения функции y и ее производных в уравнение (11):

$$C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+p(x)\left(C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}\right)+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)=0$$

или

$$C_1\left[\frac{d^2y_1}{dx^2}+p(x)\frac{dy_1}{dx}+q(x)y_1\right]+C_2\left[\frac{d^2y_2}{dx^2}+p(x)\frac{dy_2}{dx}+q(x)y_2\right]=0.$$

Так как функции y_1 и y_2, согласно условию, интегралы уравнения (11), то скобки в последнем равенстве тождественно обращаются в нуль; следовательно, это равенство представляет тождество, так что функция (24) — интеграл уравнения (11).

Так как функция (24) содержит два произвольных постоянных, то она представляет общий интеграл уравнения (11).

Теорема II. Полное (неоднородное) линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{10}$$

приводится к однородному (11) с теми же коэффициентами при помощи подстановки

$$y=z+Y, \tag{25}$$

где Y — частный интеграл полного уравнения, и поэтому общий интеграл его будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y, \tag{26}$$

где y_1 и y_2 — частные интегралы соответственного однородного уравнения.

Продифференцируем равенство (25) два раза:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dY}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2Y}{dx^2},$$

и подставим выражения функции y и ее производных в уравнение (10):

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2Y}{dx^2} + p(x)\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dY}{dx}\right) + q(x)(z + Y) = r(x)$$

или

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z + \left[\frac{d^2Y}{dx^2} + p(x)\frac{dY}{dx} + q(x)Y - r(x)\right] = 0.$$

Так как функция Y, согласно условию, интеграл уравнения (10), то скобка в последнем равенстве тождественно обращается в нуль; следовательно, это равенство представляет однородное линейное дифференциальное уравнение (11). Если $z = C_1 y_1 + C_2 y_2$ — общий интеграл последнего, то на основании равенства (25) функция (26), как содержащая два произвольных постоянных, представляет общий интеграл уравнения (10).

ПРИМЕР 1. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0. \tag{15'}$$

Покажем, что функция

$$y = e^{rx} \tag{27}$$

служит частным интегралом этого уравнения при некоторых значениях постоянного r, и для этого ее и ее производные $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$ подставим в уравнение (15'): $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$ или, по сокращении на e^{rx},

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{28}$$

Обозначим корни этого уравнения, называемого характеристическим, через r_1 и r_2; подставляя их в равенство (27) вместо r, получаем два частных интеграла $y_1 = e^{r_1x}$ и $y_2 = e^{r_2x}$ уравнения (15'), а затем, по теореме I, общий интеграл

$$y = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x}. \tag{16}$$

Однако, если характеристическое уравнение (28) имеет равные корни, т. е. $r_1 = r_2$, то функция (16) уже не будет общим интегралом, так как будет содержать только одно произвольное постоянное:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_1x} = (C_1 + C_2)e^{r_1x} = Ce^{r_1x}.$$

Докажем, что в этом случае частным интегралом уравнения (15'), кроме функции $y_1 = e^{r_1 x}$, будет также функция $y_2 = xe^{r_1 x}$. В самом деле, подставим эту функцию в уравнение (15'); так как $\frac{dy_2}{dx} = (1 + r_1 x) e^{r_1 x}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2} = (2r_1 + r_1^2 x) e^{r_1 x}$, то получаем

$$(2r_1 + r_1^2 x) e^{r_1 x} + p(1 + r_1 x) e^{r_1 x} + qxe^{r_1 x} = 0$$

или

$$[(r_1^2 + pr_1 + q) x + (2r_1 + p)] e^{r_1 x} = 0.$$

Так как r_1 — корень характеристического уравнения (28), и в случае равенства корней $2r_1 = -p$, то левая часть полученного равенства тождественно обращается в нуль, и, следовательно, функция $y_2 = xe^{r_1 x}$ действительно есть частный интеграл, а функция

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \tag{29}$$

есть общий интеграл уравнения (15').

Пусть теперь корни характеристического уравнения (28) комплексные числа $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Докажем, что тогда интегралами уравнения (15') будут служить действительные функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x. \tag{30}$$

В самом деле, так как

$$\frac{dy_1}{dx} = e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x), \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x],$$

$$\frac{dy_2}{dx} = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x), \quad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x],$$

то после подстановки в уравнение (15') последовательно функций y_1 и y_2, получаем

$$e^{\alpha x} \{[(\alpha^2 - \beta^2) + p\alpha + q] \sin \beta x + [2\alpha + p] \beta \cos \beta x\} = 0,$$
$$e^{\alpha x} \{[(\alpha^2 - \beta^2) + p\alpha + q] \cos \beta x - [2\alpha + p] \beta \sin \beta x\} = 0.$$

Так как $2\alpha = -p$ и $\alpha^2 + \beta^2 = q$, то левые части этих равенств тождественно обращаются в нуль и, следовательно, функции (30) действительно частные интегралы, а функция

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \tag{17}$$

общий интеграл уравнения (15').

ПРИМЕР 2. Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qx^2 y = 0, \tag{31}$$

где p и q — постоянные числа.

Покажем, что функция

$$y = x^r \tag{32}$$

служит частным интегралом этого уравнения при некоторых значениях показателя r, и для этого подставим $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ в уравнение (31): $x^2 r(r-1)x^{r-2} + pxrx^{r-1} + qx^r = 0$ или, по сокращении на x^r,

$$r(r-1) + pr + q = 0. \tag{33}$$

Обозначим корни этого уравнения, называемого **определяющим**, через r_1 и r_2; подставляя их в равенство (32) вместо r, получаем два частных интеграла $y_1 = x^{r_1}$ и $y_2 = x^{r_2}$ данного уравнения (31), а затем, по теореме I, общий интеграл

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}. \tag{34}$$

Так, например, в случае уравнения $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ определяющее его уравнение $r(r-1) + r - 1 = 0$, так что $r_1 = 1$ и $r_2 = -1$ и общий интеграл $y = C_1 x + C_2 x^{-1}$.

ПРИМЕР 3. Полное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x). \tag{10}$$

На основании теоремы II интегрирование полного уравнения (10) приводится к интегрированию соответствующего однородного (11), если удается найти частный интеграл Y полного уравнения (10).

Как мы видели (§ 3, IV, V, VI), в простейших случаях частный интеграл Y полного уравнения (10) может быть найден непосредственно. Но подобрать частный интеграл удается далеко не всегда, и тогда пользуются методом Лагранжа „изменения произвольных постоянных“; понятие об этом методе дадим на двух задачах.

ЗАДАЧА 1. Возьмем полное линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x); \tag{35}$$

мы видели, что у соответствующего однородного (6) интегралом служит функция $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Метод Лагранжа состоит в том, что рассматривают произвольное постоянное C, как некоторую функцию v от x, и подбирают функцию v так, чтобы произведение

$$y = ve^{-\int (px)dx} \tag{36}$$

было интегралом уравнения (35). Для удобства обозначим частный интеграл уравнения (6) $e^{-\int p(x)dx}$ через u, так что

$$y = uv, \tag{36}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx};$$

подставляем выражения функции y и ее производной в уравнение (35):

$$u\frac{dv}{dx}+v\left[\frac{du}{dx}+p(x)u\right]=q(x);$$

так как функция u, как интеграл уравнения (6), обращает в нуль скобку, стоящую в левой части уравнения, то $u\frac{dv}{dx}=q(x)$ или $dv=\frac{q(x)}{u}dx$, откуда

$$v=\int\frac{q(x)}{u}dx+C \text{ и } y=Cu+u\int\frac{q(x)}{u}dx, \tag{37}$$

где $u=e^{-\int p(x)dx}$. Из формулы (37) видно, что частный интеграл Y полного уравнения (35) равен $u\int\frac{q(x)}{u}dx$.

ЗАДАЧА 2. Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=b\sin(ax+h) \tag{38}$$

нельзя проинтегрировать тем же методом, что и уравнение (20), так как в этом случае постоянное A обращается в бесконечность; поэтому приходится прибегнуть к методу Лагранжа: в выражении (12) общего интеграла уравнения (5) рассматриваем произвольные постоянные C_1 и C_2, как некоторые функции v и w аргумента x, так что

$$y=v\sin(ax)+w\cos(ax); \tag{39}$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx}=av\cos(ax)-aw\sin(ax)+\frac{dv}{dx}\sin(ax)+\frac{dw}{dx}\cos(ax).$$

Пользуемся тем обстоятельством, что на д в е функции v и w наложено пока о д н о условие, чтобы функция (39) y была интегралом уравнения (38), и поэтому вводим еще в т о р о е требование

$$\frac{dv}{dx}\sin(ax)+\frac{dw}{dx}\cos(ax)=0; \tag{40}$$

тогда выражение производной функции y принимает более простой вид $\frac{dy}{dx}=av\cos(ax)-aw\sin(ax)$; отсюда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2v\sin(ax)-a^2w\cos(ax)+a\frac{dv}{dx}\cos(ax)-a\frac{dw}{dx}\sin(ax)$$

или, на основании равенства (39),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y + a\frac{dv}{dx}\cos(ax) - a\frac{dw}{dx}\sin(ax);$$

сопоставляя это равенство с уравнением (38), получаем

$$a\frac{dv}{dx}\cos(ax) - a\frac{dw}{dx}\sin(ax) = b\sin(ax+h). \tag{41}$$

Определяем из уравнений (40) и (41) производные

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b}{a}\sin(ax+h)\cos(ax), \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{b}{a}\sin(ax+h)\sin(ax),$$

откуда

$$v = \frac{b}{a}\int\sin(ax+h)\cos(ax)\,dx = \frac{b}{2a}\int[\sin(2ax+h)+\sin h]\,dx =$$

$$= -\frac{b}{4a^2}\cos(2ax+h) + \frac{b}{2a}x\sin h + C_1,$$

$$w = -\frac{b}{a}\int\sin(ax+h)\sin(ax)\,dx = \frac{b}{2a}\int[\cos(2ax+h)-\cos h]\,dx =$$

$$= \frac{b}{4a^2}\sin(2ax+h) - \frac{b}{2a}x\cos h + C_2,$$

$$y = v\sin(ax) + w\cos(ax) = C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax) +$$

$$+\frac{b}{4a^2}\left\{-\cos(2ax+h)\sin(ax) + \sin(2ax+h)\cos(ax)\right\} +$$

$$+\frac{b}{2a}x[\sin h\sin(ax) - \cos h\cos(ax)].$$

Так как $-\cos(2ax+h)\sin(ax)+\sin(2ax+h)\cos(ax) = \sin(ax+h) = \cos h\sin(ax)+\sin h\cos(ax)$, то выражение в фигурных скобках присоединяем к членам с произвольными постоянными, и общий интеграл примет окончательно такой вид:

$$y = C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax) - \frac{b}{2a}x\cos(ax+h). \tag{42}$$

Отсюда видно, что частным интегралом полного уравнения (38) служит функция $Y = -\frac{b}{2a}x\cos(ax+h)$; догадаться об этом непосредственно было бы трудно.

Метод Лагранжа всегда приводит к цели, но очень громоздок; поэтому стараются подыскать для данного уравнения какой-нибудь частный прием, более быстро приводящий к цели.

Например, продифференцируем два раза данное уравнение (38):

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a^2\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2b\sin(ax+h);$$

отсюда

$$\frac{d^4y}{dx^4}+a^2\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y\right)$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2a^2\frac{d^2y}{dx^2}+a^4y=0\,; \tag{43}$$

корни характеристического уравнения $r^4+2a^2r^2+a^4=0$ следующие: $r_1=r_2=ai$; $r_3=r_4=-ai$; таким образом (пример 1) общий интеграл уравнения (43)

$$y=C_1\sin(ax)+C_2\cos(ax)+C_3\,x\sin(ax)+C_4\,x\cos(ax)$$

или

$$y=C_1\sin(ax)+C_2\cos(ax)-Ax\cos(ax+\gamma), \tag{44}$$

где произвольные постоянные A и γ определяются уравнениями $C_3=$ $=A\sin\gamma$, $C_4=-A\cos\gamma$. Функция (44) служит общим интегралом и данного уравнения (38) при условии, что третий член $Y=-Ax\cos(ax+\gamma)$ есть его частный интеграл; налагая это требование на функцию Y, т.-е. ставя условием, чтобы после подстановки ее в уравнение (38) получилось тождество, имеем

$$\gamma=h,\quad A=\frac{b}{2a}\,.$$

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ.

Функции многих переменных.

§ 1. Частные производные и частные дифференциалы первого порядка.

Если переменная величина z получает значения соответственно значениям нескольких переменных величин — аргументов $x, y, \ldots, u$, то она называется функцией многих переменных и обозначается следующим образом:

$$z = f(x, y, \ldots, u).$$

Функции многих переменных так же классифицируются, как и функции одного переменного (часть первая, §§ 9—13). В частности мы будем рассматривать только функции однозначные и непрерывные.

Функция многих переменных называется однозначной, если она получает единственное значение соответственно системе значений аргументов; поэтому, например, под функцией

$$z = \sqrt{x + y + t + v + u}$$

мы подразумеваем только положительное значение радикала.

Функция называется непрерывной в данной точке $(x, y, \ldots, u)$, т.-е. при данной системе значений аргументов, если при бесконечно малых приращениях этих значений аргументов она сама получает бесконечно малое приращение, т.-е. разность

$$f(x + h, y + k, \ldots, u + l) - f(x, y, \ldots, u) = \Delta z$$

стремится к нулю, если приращения аргументов $h, k, \ldots, l$ стремятся к нулю.

Изучение функции многих переменных основывается на следующем положении: если z есть функция переменных $x, y, \ldots, u$, т.-е.

$$z = f(x, y, \ldots, u),$$

то мы можем исследовать ее, как функцию одного переменного, принимая все аргументы, кроме одного из них, за постоянные.

Так, например, если мы возьмем систему значений аргументов и затем какому-нибудь одному из этих значений дадим приращение, не меняя других, то функция получит приращение, называемое частным приращением по этому аргументу в отличие от полного приращения, которое получает функция, если мы даем приращения всем аргументам.

Частные приращения обозначаются таким образом: $\Delta_x z$ — частное приращение по x, $\Delta_y z$ — частное приращение по y и т. д.; следовательно,

$$\begin{aligned}
\Delta_x z &= f(x+h,\ y, \ldots, u) - f(x, y, \ldots, u),\\
\Delta_y z &= f(x,\ y+k, \ldots, u) - f(x, y, \ldots, u),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_u z &= f(x,\ y, \ldots, u+l) - f(x, y, \ldots, u);
\end{aligned}$$

полное же приращение, как мы видели, представится таким образом:

$$\Delta z = f(x+h,\ y+k, \ldots, u+l) - f(x, y, \ldots, u).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать функцию только двух переменных $z = f(x, y)$, так как введение большего числа аргументов сильно усложняет выкладки, а по существу нового ничего не дает; с другой стороны, результаты, полученные для функции двух переменных, поддаются геометрическому истолкованию, так как уравнение $z = f(x, y)$ изображает поверхность (Аналитическая Геометрия, стр. 176). Таким образом, в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, частные приращения представятся равенствами:

$$\begin{aligned}
\Delta_x z &= f(x+h, y) - f(x, y),\\
\Delta_y z &= f(x, y+k) - f(x, y).
\end{aligned}$$

Если частное приращение функции разделить на приращение соответствующего аргумента и перейти к пределу, предполагая, что последнее стремится к нулю, то получится **частная производная** (первого порядка) по этому переменному (если она существует):

$$\begin{aligned}
lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = z_x' = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\\
lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} &= lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = z_y' = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Обозначения

$$z_x', \quad f_x'(x, y), \quad z_y', \quad f_y'(x, y)$$

введены, как мы знаем (часть вторая, гл. I, § 2), Лагранжем *); обозначения же

---

*) Можно писать просто $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ без значка вверху.

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

введены Якоби (Iacobi).

Умножая частную производную на приращение соответствующего независимого переменного, получаем так называемый **частный дифференциал**:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \quad \text{или} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Так как дифференциал независимого переменного равен его приращению (часть вторая, гл. VI, § 3), то

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

и, следовательно,

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy, \tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d_x z}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d_y z}{dy}.$$

Следует заметить, что обозначение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ никогда не может быть рассматриваемо, как отношение ∂z к ∂x, а всегда является одним символом, так что его можно писать в следующем виде: $\frac{\partial}{\partial x} z$; между тем символ $\frac{d_x z}{dx}$ можно рассматривать не только как обозначение частной производной функции z по аргументу x, но и как отношение частного дифференциала функции z по аргументу x к дифференциалу этого аргумента.

Итак, **частной производной (первого порядка) функции по данному аргументу называется обыкновенная производная по этому переменному, взятая в предположении, что все остальные аргументы постоянны.**

ПРИМЕР. $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Помножим первое равенство на x, а второе на y и сложим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Мы получили пример уравнения с частными производными; частным интегралом его (ср. часть третью, гл. IV, § 4) служит функция

$$z = \arcsin \frac{y}{x};$$

легко показать, что общий интеграл его содержит произвольную функцию. В самом деле, положим

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $F(t)$ обозначает какую угодно функцию аргумента $t = \frac{y}{x}$; тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = -F'(t)\frac{y}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = F'(t)\frac{1}{x};$$

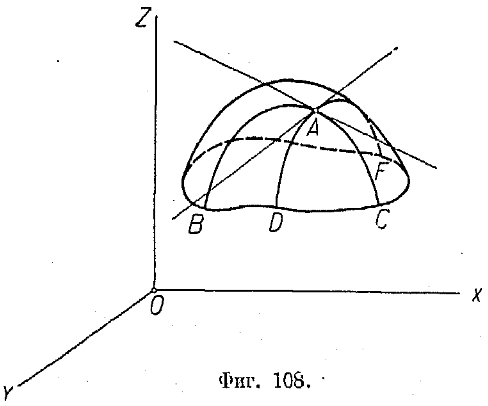
подставив эти выражения производных в полученное уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

приходим к тождеству:

$$-xF'(t)\frac{y}{x^2} + yF'(t)\frac{1}{x} = 0.$$

Рассмотрим теперь геометрический смысл частных производных первого порядка. Рассечем поверхность $z = f(x, y)$ (фиг. 108) плоскостью, проходящею через точку $A(x, y, z)$ и перпендикулярной к оси Y; у всех точек этой плоскости ордината y одна и та же, и, следовательно, угловой коэффициент касательной в точке A к кривой сечения BAC относительно оси X будет равен $\frac{\partial z}{\partial x}$, так как при нахождении этой производной аргумент y считается постоянным. Повторяя те же рассуждения для сечения DAF поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью, перпендикулярной к оси X, получим, что частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть угловой коэффициент касательной в точке A кривой DAF относительно оси Y.



Фиг. 108.

§ 2. Полный дифференциал первого порядка.

Полным дифференциалом (первого порядка) функции нескольких независимых переменных называется сумма ее частных дифференциалов по всем этим переменным, т.-е.

$$dz = d_x z + d_y z.$$

На основании формул (1) получаем такое выражение полного дифференциала:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial x} dy; \tag{2}$$

начиная с Эйлера, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ обозначают часто соответственно через p и q, так что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Например, если $z = \arcsin\frac{y}{x}$, то

$$dz = -\frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy.$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, что функция многих переменных постоянна, служит равенство нулю ее полного дифференциала.

Функция $z = f(x, y)$ постоянна; это значит, что она не зависит от x и y, следовательно (часть вторая, гл. I, § 4), $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, откуда по формуле (2) и $dz = 0$.

Пусть обратно $dz = 0$. Так как $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ — величины произвольные, то положим сперва, что $dx = 1$, а $dy = 0$; тогда по формуле (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, т.-е. (часть вторая, гл. II, § 5) функция z от x не зависит; полагая, наоборот, $dx = 0$, $dy = 1$, мы получим по формуле (2) $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, т.-е. функция z не зависит и от y; следовательно, она постоянна.

§ 3. Полный дифференциал и производная сложной функции одного независимого переменного.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, где аргументы x и y зависят от переменного t, т.-е. $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$; отсюда вытекает, что z есть функция одного независимого переменного t, например, $z = F(t)$, т.-е. $z = f[\varphi(t), \psi(t)] = F(t)$. Производная и дифференциал функции z по этому переменному t называются **полными** производной и дифференциалом. Покажем, что в этом случае выражение (2) полного дифференциала остается неизменным; только, конечно, дифференциалы аргументов не будут равны приращениям их:

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \quad dy = \psi'(t)\,dt$$

(часть вторая, гл. VI, § 3).

Чтобы получить выражение полной производной, составим полное приращение функции:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y);$$

вычтем и прибавим $f(x,\ y+\Delta y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) + f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y);$$

по теореме Лагранжа (часть вторая, гл. II, § 2)

$$\Delta z = f_x'(x+\vartheta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\,\Delta x + f_y'(x,\ y+\vartheta_2\Delta y)\,\Delta y,$$

где $0<\vartheta_1<1$ и $0<\vartheta_2<1$; делим обе части равенства на приращение независимого переменного Δt и переходим к пределу, полагая $\Delta t\to 0$ и, следовательно, $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f_x'(x+\vartheta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\cdot \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} +$$
$$+\lim_{\Delta t\to 0} f_y'(x,\ y+\vartheta_2\Delta y)\cdot \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т.-е.

$$\frac{dz}{dt} = f_x'(x,\ y)\frac{dx}{dt} + f_y'(x,\ y)\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

Таково выражение полной производной; помножая ее на dt, получаем полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

т.-е. формулу (2).

Как легко показать, полученные раньше (часть вторая, гл. I, § 4 и гл. VI, § 3) выражения производной и дифференциала суммы, произведения и т. д. заключаются в формулах (2) и (3), как частные случаи.

Например, если $z = x + y$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{и} \quad dz = dx + dy;$$

в случае $z = xy$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \quad \text{и} \quad dz = y\,dx + x\,dy \quad \text{или} \quad z' = yx' + xy',$$

где z', x' и y' производные по t; если $z = \dfrac{x}{y}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \quad \text{и} \quad z' = \frac{1}{y}x' - \frac{x}{y^2}y' = \frac{yx' - xy'}{y^2}.$$

Если аргумент x — независимое переменное, т.-е. $t=x$, то $dt=dx$, $\frac{dx}{dt}=1$, и формула (3) принимает такой вид:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Мы еще раз убеждаемся в различии между полной производной $\frac{dz}{dx}$ и частной $\frac{\partial z}{\partial x}$.

ПРИМЕР. $z=x^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{dz}{dx}=yx^{y-1}+x^y\ln x\frac{dy}{dx}.$$

Так как формула (2) верна, будут ли аргументы x и y независимые переменные или функции переменного t, то для отыскания полного дифференциала в первом случае гораздо удобнее пользоваться раньше полученными результатами (часть вторая, гл. VI, § 3), чем формулой (2). Например, если $z=\arcsin\frac{y}{x}$, где x и y — независимые переменные, то гораздо проще получить dz, если считать x и y функциями какого-нибудь независимого переменного, например, t, и затем поступать по правилам дифференцирования круговой функции arcsin и дроби:

$$dz=d\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)=\frac{d\frac{y}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}=\frac{\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$

(сравнить с примером § 2).

§ 4. Полный дифференциал и частные производные сложной функции нескольких независимых переменных.

Покажем, что формула (2) сохраняет силу и в том случае, когда x и y — функции двух независимых переменных u и v:

$$x=\varphi(u, v) \quad \text{и} \quad y=\psi(u, v).$$

Так как $z=f(x, y)=f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$, то z есть функция независимых переменных u и v: $z=F(u, v)$; следовательно, по формуле (2),

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Кроме того, по формуле (3) берем полную производную z по u, помня, что при этом v считается постоянным:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)_{v=\text{пост}}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{du}\right)_{v=\text{пост}}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{du}\right)_{v=\text{пост}}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\ ^{*});$$

на основании тех же соображений

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Подставляем в формулу полного дифференциала полученные выражения частных производных $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv.$$

Собираем отдельно члены, содержащие производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, и отдельно члены, содержащие производную $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right);$$

по формуле (2)

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv;$$

следовательно,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Таким образом, формула (2) верна во всех трех случаях; но только в первом случае (§ 2)

$$dx=\Delta x,\ dy=\Delta y;$$

во втором (§ 3)

$$dx=\frac{dx}{dt}dt,\quad dy=\frac{dy}{dt}dt;$$

в третьем (§ 4)

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

---

*) Сокращение $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}$ на ∂x отнюдь недопустимо, так как $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial x}{\partial u}$ представляют нераздельные символы $\frac{\partial}{\partial x}z$ и $\frac{\partial}{\partial u}x$.

§ 5. Частные производные высших порядков.

Подобно тому, как раньше (часть вторая, гл. I, § 6) мы пришли к понятию (обыкновенной) производной высшего порядка, мы можем тем же путем получить частные производные второго, третьего и т. д. порядков. В самом деле, как функция $z=f(x, y)$ зависит от двух аргументов x и y, точно так же и ее частные производные (первого порядка)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x, y)$$

являются функциями тех же двух аргументов x и y, и, следовательно, можно получить от каждой из них по две частных производных (если таковые существуют) — всего четыре:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f_{yx}''(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f_{xy}''(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x, y);$$

в случае приведенного выше (§ 1) примера получаем следующие выражения этих четырех частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right]=$$

$$=\frac{y}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{x^2\sqrt{(x^2-y^2)^3}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{y^2}{x\sqrt{(x^2-y^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right]=-\frac{x}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right]=\frac{y}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}.$$

Точно таким же путем получаются частные производные порядков выше второго. Так,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}\right]=-\frac{3xy}{\sqrt{(x^2-y^2)^5}} \quad \text{и т. д.}$$

Из этого примера видно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Покажем, что это равенство верно для любой функции $z=f(x, y)$.

Для этого рассмотрим частные приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ (§ 1) и с целью подчеркнуть мысль, что при дальнейшем рассуждении первое приращение будем считать функцией только y, а второе только x, пишем

$$\varphi(y)=\Delta_x z=f(x+h,\, y)-f(x,\, y),\quad \psi(x)=\Delta_y z=f(x,\, y+k)-f(x,\, y);$$

применим к обеим функциям теорему Лагранжа (часть вторая, гл. II, § 2):

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=k\,\varphi'(y+\vartheta_1 k),\quad \psi(x+h)-\psi(x)=h\,\psi'(x+\vartheta_2 h);$$

но

$$\varphi'(y+\vartheta_1 k)=f_y'(x+h,\ y+\vartheta_1 k)-f_y'(x,\ y+\vartheta_1 k),$$
$$\psi'(x+\vartheta_2 h)=f_x'(x+\vartheta_2 h,\ y+k)-f_x'(x+\vartheta_2 h,\ y);$$

применим к полученным разностям вторично теорему Лагранжа:

$$f_y'(x+h,\ y+\vartheta_1 k)-f_y'(x,\ y+\vartheta_1 k)=h\,f_{xy}''(x+\vartheta_3 h,\ y+\vartheta_1 k),$$
$$f_x'(x+\vartheta_2 h,\ y+k)-f_x'(x+\vartheta_2 h,\ y)=k\,f_{yx}''(x+\vartheta_2 h,\ y+\vartheta_4 k);$$

таким образом, окончательно

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=k\,h\,f_{xy}''(x+\vartheta_3 h,\ y+\vartheta_1 k),$$
$$\psi(x+h)-\psi(x)=h\,k\,f_{yx}''(x+\vartheta_2 h,\ y+\vartheta_4 k).$$

С другой стороны,

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=[f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y+k)]-[f(x+h,\ y)-f(x,\ y)]=$$
$$=f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y+k)-f(x+h,\ y)+f(x,\ y),$$
$$\psi(x+h)-\psi(x)=[f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)]-[f(x,\ y+k)-f(x,\ y)]=$$
$$=f(x+h,\ y+k)-f(x+h,\ y)-f(x,\ y+k)+f(x,\ y),$$

т.-е.

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=\psi(x+h)-\psi(x),$$
$$k\,h\,f_{xy}''(x+\vartheta_3 h,\ y+\vartheta_1 k)=h\,k\,f_{yx}''(x+\vartheta_2 h,\ y+\vartheta_4 k);$$

сокращаем обе части последнего равенства на произведение hk:

$$f_{xy}''(x+\vartheta_3 h,\ y+\vartheta_1 k)=f_{yx}''(x+\vartheta_2 h,\ y+\vartheta_4 k);$$

переходим к пределу, полагая, что $h\to 0$ и $k\to 0$:

$$f_{xy}''(x,\ y)=f_{yx}''(x,\ y)\quad\text{или}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Таким образом, производных второго порядка будет всего три:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=s,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t;$$

обозначения $r,\ s,\ t$, подобно обозначениям p и q (§ 2), были введены Эйлером.

Рассмотрим теперь производную какого угодно порядка n; на основании только что доказанного можно переставлять между собою два последовательных дифференцирования. Вследствие этого в каком порядке ни производить k дифференцирований по x и m дифференцирований по y, где $k+m=n$, можно путем перестановок двух последовательных дифференцирований привести результат к такому виду:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^m},$$

где $k+m=n$.

Так, например,

$$\frac{\partial^6 z}{\partial x^2 \partial y\, \partial x\, \partial y\, \partial x}=\frac{\partial^6 z}{\partial x^2 \partial x\, \partial y\, \partial y\, \partial x}=\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y\, \partial x\, \partial y}=\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial x\, \partial y\, \partial y}=\frac{\partial^6 z}{\partial x^4 \partial y^2}.$$

§ 6. Полные дифференциалы высших порядков.

Рассуждая точно так же, как и в случае функции одного аргумента (часть вторая, гл. VI, § 5), мы можем прийти к понятию полного дифференциала второго порядка, как полного дифференциала от полного дифференциала первого порядка:

$$d^2 z = d\,(dz)$$

и вообще

$$d^n z = d\,(d^{n-1} z).$$

Найдем выражение полного дифференциала второго порядка:

$$d^2 z = d\,(dz) = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right] = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial x}d(dx)+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy+$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}d\,(dy)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]dx+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]dy+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y=$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y=$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

Первые три члена легко запомнить, если условно представить их в таком виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

т. е. для получения этих трех членов следует раскрыть скобки по формуле бинома Ньютона и умножить на z, а затем выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}z,\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}z,\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}z$$

рассматривать, как вторые производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Посмотрим, когда отпадут четвертый и пятый члены, которые не входят в условную формулу; легко сообразить, что это будет тогда, когда x и y независимые переменные, т.-е. $d^2x = d(dx) = d(\Delta x) = 0$ и $d^2y = d(dy) = d(\Delta y) = 0$, или когда x и y — линейные функции некоторого независимого переменного t, т.-е. $x = a + ht$, $y = b + kt$, где a, b, h, k — постоянные, так как в этом случае $d^2x = d^2(a+ht) = d(d[a+ht]) = d(h\,dt) = h\,d(\Delta t) = 0$ и точно так же $d^2y = 0$. Таким образом, если формула (2) верна при всяких x и y, то формула

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$$

имеет место только в указанных выше двух случаях.

Путем заключения от n к $n+1$ и на основе равенства $d^{n+1}z = d(d^nz)$ можно было бы доказать и более общую формулу:

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

к которой относятся все рассуждения, только что изложенные для случая $n = 2$. Например,

$$d^3(xy) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}(xy) + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(xy) + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(xy) + \frac{\partial^3}{\partial y^3}(xy) =$$
$$= y\frac{\partial^3}{\partial x^3}x + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}x + 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}y + x\frac{\partial^3}{\partial y^3}y = 0.$$

§ 7. Замена переменных.

Возьмем функцию двух переменных $z = f(x, y)$ и посмотрим, как найти ее частные производные в предположении, что аргументы x и y функции новых независимых переменных, например, φ и ϱ.

Для облегчения исследования возьмем частный случай — именно переход от декартовых координат к полярным:

$$x = \varrho\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\varphi.$$

I. Находим частные производные первого порядка по правилам дифференцирования сложной функции (§ 4):

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial \varrho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho};\qquad (1)$$

в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin\varphi,$$

так что

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial x}\varrho \sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\varrho \cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varrho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi.$$

Решив эти уравнения относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим искомые выражения частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\sin\varphi.$$

II. К тому же результату мы придем, взяв, вместо частных производных, полные дифференциалы:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varrho}d\varrho. \tag{2}$$

Подставим сюда выражения дифференциалов $dx = -\varrho \sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, d\varrho$, $dy = \varrho\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, d\varphi$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-\varrho\sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\, d\varrho) + \frac{\partial z}{\partial y}(\varrho\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, d\varrho) =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varrho}d\varrho$$

или

$$\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\varrho\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\varrho\cos\varphi\right)d\varphi + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi\right)d\varrho =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varrho}d\varrho.$$

Так как аргументы φ и ϱ независимые переменные, то $d\varrho = \Delta\varrho$ и $d\varphi = \Delta\varphi$; полагая один раз $\Delta\varrho = 1$ и $\Delta\varphi = 0$, а другой раз $\Delta\varrho = 0$ и $\Delta\varphi = 1$, приходим к полученным раньше выражениям частных производных $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$.

III. Можно и непосредственно найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ путем дифференцирования по правилам сложной функции (§ 4) в предположении, что аргументы x и y независимые переменные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y}; \tag{3}$$

дифференцируем теперь равенства $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$

сперва по x:

$$1 = -\varrho \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial\varrho}{\partial x}, \quad 0 = \varrho \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\varphi \frac{d\varrho}{\partial x},$$

а потом по y:

$$0 = -\varrho \sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cos\varphi \frac{\partial\varrho}{\partial y}, \quad 1 = \varrho \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \sin\varphi \frac{\partial\varrho}{\partial y};$$

решаем полученные уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\varrho}, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial y} = \sin\varphi.$$

Подставляем эти значения производных в формулы (3), определяющие частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial\varrho}\sin\varphi.$$

Производные второго и высших порядков находятся тем же путем.

ПРИМЕР. Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

полагая $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$.

Пользуясь только что полученными формулами, получаем

$$\varrho\cos\varphi\left[-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos\varphi\right] + \varrho\sin\varphi\left[\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{\varrho} + \frac{\partial z}{\partial\varrho}\sin\varphi\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial\varrho} = 0,$$

т.-е. z от ϱ не зависит и представляет произвольную функцию только от $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; следовательно, $z = F\left(\frac{y}{x}\right)$, где $F\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$ тоже произвольная функция (ср. § 1).

§ 8. Минимум и максимум
(необходимое условие).

Говорят, что **функция имеет минимум в данной точке**, т.-е. **при данной системе значений аргументов, если с возрастанием или убыванием их от этих значений функция возрастает.**

Аналитически это определение для функции $z=f(x, y)$ двух переменных можно представить таким образом:

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)>0$$

при $h \gtreqless 0$, $k \gtreqless 0$, где h и k достаточно малы.

Говорят, что **функция имеет максимум в данной точке**, т.-е. **при данной системе значений аргументов, если с возрастанием или убыванием их от этих значений функция убывает**, т.-е.

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)<0$$

при $h \gtreqless 0$, $k \gtreqless 0$, где h и k достаточно малы.

Если функция $z=f(x,\ y)$ имеет экстремум в точке $(a,\ b)$, то экстремум будет и в том случае, когда изменяется только x или только y; в самом деле, если положить в написанных неравенствах, например, $k=0$, то получим условие экстремум функции $z=f(x,\ b)$ только одного аргумента x для данного его значения a:

$$f(a+h, b)-f(a,\ b)>0 \quad \text{или} \quad f(a+h,\ b)-f(a,\ b)<0,$$

т.-е. функция $f(x,\ b)$, зависящая только от x, имеет соответственно минимум или максимум при $x=a$; но тогда ее производная*) $f_x'(x,\ b)$ должна (часть вторая, гл. III, § 3) при этом значении аргумента обращаться в нуль:

$$f_x'(a,\ b)=0.$$

Повторяя те же самые рассуждения для функции $f_y'(a,\ y)$, получаем

$$f_y'(a,\ b)=0.$$

Таким образом, единственные точки, в которых функция $z=f(x,\ y)$ может иметь экстремум, это те, для которых частные производные равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{4}$$

На основании формулы (2) получаем, что в этом случае также и

$$dz=0. \tag{5}$$

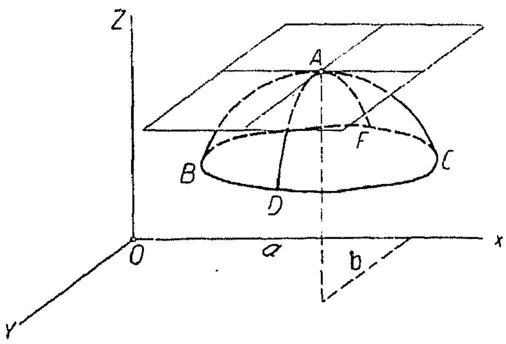
Обратно, если

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0,$$

то, полагая один раз $dx=\Delta x=1$ и $dy=\Delta y=0$, а другой раз $dx=0$, $dy=1$, получаем в первом случае $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, а во втором $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, т.-е. **не-**

*) Мы не будем рассматривать случая, когда частные производные не существуют.

обходимое условие экстремум можно представить в виде равенства нулю или всех частных производных первого порядка или полного дифференциала. Геометрически полученные условия (4) означают, что касательные в точке $A\ [a,\ b,\ f(a,\ b)]$ к сечениям BAC и DAF поверхности $z = f(x,\ y)$ плоскостями $y = b$ и $x = a$ параллельны соответственно осям X и Y и, следовательно, плоскости XOY; как мы увидим (часть пятая, гл. II, § 1), плоскость, проходящая через эти две касательные, сама касается поверхности и, следовательно, в точке экстремум касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOY.



Фиг. 109.

ПРИМЕР. Из всех параллелепипедов, у которых сумма трех измерений x, y, u есть величина постоянная, равная g ед. длины, найти с наибольшим объемом.

Так как объем параллелепипеда $z = xyu$, где $u = g - x - y$, то задача приводится к отысканию экстремум функции

$$z = xy\,(g - x - y).$$

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,(g - 2x - y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\,(g - x - 2y),$$

то приходим к решению уравнений

$$y\,(g - 2x - y) = 0, \quad x\,(g - x - 2y) = 0,$$

откуда получаем четыре системы решений:

$$1)\ x = 0,\ y = 0,\ u = g, \quad 2)\ x = 0,\ y = g,\ u = 0,$$

$$3)\ x = g,\ y = 0,\ u = 0, \quad 4)\ x = y = u = \frac{1}{3}\,g;$$

условиям задачи удовлетворяет только последняя система решений, соответствующая кубу с измерениями, равными каждое $\frac{1}{3}g$ ед. длины; так как в первых трех случаях объем минимальный, т.-е. $z = 0$, то в последнем случае мы имеем максимальный объем в $\frac{1}{27}g^3$ куб. ед.

§ 9. Минимум и максимум

(достаточное условие).

Чтобы найти необходимое условие экстремум функции многих (двух) переменных, мы привели решение этого вопроса к нахождению экстремум функции одного переменного. Воспользуемся тем же самым приемом для нахождения критерия, дающего возможность отличить максимум от минимум; для этого будем рассматривать аргументы x и y, как линейные функции какого-нибудь независимого переменного v:

$$x = a + hv, \quad y = b + kv,$$

где h и k — постоянные, совершенно произвольные, a и b, согласно условию, — значения аргументов x и y, дающие экстремум функции $z = f(x, y) = f(a + hv, \ b + kv) = F(v)$; следовательно, функция $z = F(v)$ имеет экстремум $f(a, b) = F(0)$ при $v = 0$; полный дифференциал второго порядка этой функции представится условно (§ 6) таким образом:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$
$$= rh^2 dv^2 + 2shk\, dv^2 + tk^2 dv^2 = [rh^2 + 2shk + tk^2]\, dv^2,$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad dx = h dv, \ dy = k dv.$$

Положим v равным нулю; так как функция $z = F(v)$ при этом значении v получает экстремум, то ее вторая производная $\frac{d^2 z}{dv^2}$ (часть вторая, гл. III, § 3) при $v = 0$ и **для любых значений** h и k должна быть положительна в случае минимум и отрицательна в случае максимум; случай же обращения ее в нуль при всяком h и k мы рассматривать не будем.

Обозначим через $F''(0)$, R, S и T значения производных $\frac{d^2 z}{dv^2}$, r, s и t при $v = 0$, т.-е. $F''(0) = \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right)_{v=0}$, $\quad R = f_{xx}''(a, b)$, $\quad S = f_{xy}''(a, b)$, $T = f_{yy}''(a, b)$; тогда

$$F''(0) = Rh^2 + 2Shk + Tk^2.$$

Следовательно, вопрос о постоянстве знака $F''(0)$ при любых значениях h и k сводится к вопросу о постоянстве знака трехчлена; преобразуем его, предполагая сперва, что $R \neq 0$:

$$R\,[Rh^2 + 2Shk + Tk^2] = R^2h^2 + 2RShk + RTk^2 =$$
$$= R^2h^2 + 2RShk + S^2k^2 + (RT - S^2)\, k^2 = (Rh + Sk)^2 + k^2 \Delta,$$

где $\Delta = RT - S^2$ называется дискриминантом трехчлена. Следовательно,

$$R\, F''(0) = (Rh + Sk)^2 + k^2 \Delta.$$

Так как $(Rh + Sk)^2$ и k^2 при любых h и k положительны, то при $\Delta > 0$ всегда

$$R\, F''(0) = (Rh + Sk)^2 + k^2 \Delta > 0;$$

следовательно, знак второй производной $F''(0)$ всегда совпадает со знаком R, т.-е. со знаком $f_{xx}''(a, b)$. Таким образом, $F''(0)$ знака не меняет, каковы бы ни были h и k; поэтому значение $F(0) = f(a, b)$ функции z представляет для нее экстремум — именно минимум, если $R > 0$, и максимум, если $R < 0$. Так как $RT - S^2 > 0$, то R и T должны иметь одинаковые знаки; следовательно, в случае минимум $T > 0$, в случае максимум $T < 0$.

Если $\Delta < 0$, то, подбирая h и k таким образом, чтобы $Rh + Sk = 0$, получаем

$$R\,F''(0) = k^2\Delta < 0;$$

если же положить $k = 0$, то

$$R\,F''(0) = R^2h^2 > 0,$$

т.-е. $F''(0)$ меняет свой знак в зависимости от того, каковы h и k, так что значение $F(0) = f(a, b)$ функции z не представляет для нее экстремум.

Наконец, в случае $\Delta = 0$, подбирая опять h и k таким образом, чтобы $Rh + Sk = 0$, получаем

$$R\,F''(0) = 0 \quad \text{или} \quad F''(0) = 0.$$

Этот случай, таким образом, требует дополнительного исследования при помощи производных, порядок которых выше второго, чтобы выяснить, будет или не будет экстремум.

Рассмотрим частный случай, когда $T = 0$; в этом случае $\Delta = -S^2 < 0$, и экстремум быть не может. Так как можно было бы дословно повторить все рассуждения, помноживши только $F''(0)$ не на R, а на T, то ясно, что и при $R = 0$ не может быть экстремум. Наконец, если $R = 0$ и $T = 0$, то $F''(0) = 2Shk$; экстремум в этом случае быть не может, так как, при $hk > 0$, $S\,F''(0) > 0$, а, при $hk < 0$, $S\,F''(0) < 0$, т.-е. $F''(0)$ меняет свой знак в зависимости от значений h и k.

Подведем итог всем нашим рассуждениям.

Необходимое условие существования экстремум в точке (a, b):

$$f_x'(a, b) = 0, \quad f_y'(a, b) = 0.$$

Достаточное условие существования экстремум в точке (a, b):

$$\Delta = f_{xx}''(a, b) \cdot f_{yy}''(a, b) - f_{xy}''^2(a, b) > 0.$$

Кроме того, для минимум дополнительным условием является

$$f_{xx}''(a, b) > 0 \quad \text{или} \quad f_{yy}''(a, b) > 0,$$

для максимум

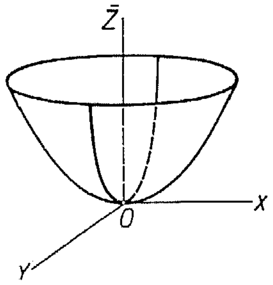
$$f_{xx}''(a, b) < 0 \quad \text{или} \quad f_{yy}''(a, b) < 0.$$

ПРИМЕР 1. Найти экстремум функции $z = mx^2 + ny^2$.

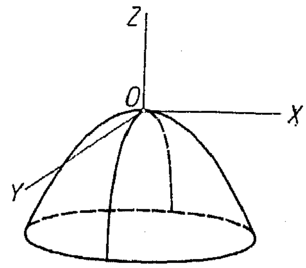
Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2mx$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ny$, то экстремум может быть только, если

$2mx = 0$ и $2ny = 0$, т.-е. при $x = 0$, $y = 0$; так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2m$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2n$, то $\Delta = 4mn$. Если $mn > 0$, то функция z имеет экстремум при $x = y = 0$ — именно минимум (фиг. 110), если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2m > 0$, т.-е. $m > 0$, и максимум (фиг. 111), если $m < 0$. Если $mn < 0$, то нет экстремум (фиг. 112). Если $mn = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Воспользуемся этим примером, чтобы осветить с геометрической стороны полученные результаты. Если коэффициенты m и n оба положительны, то уравнение $z = mx^2 + ny^2$ представляет эллиптический па-

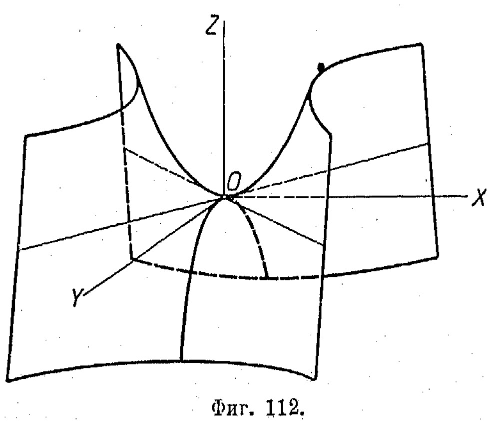


Фиг. 110.

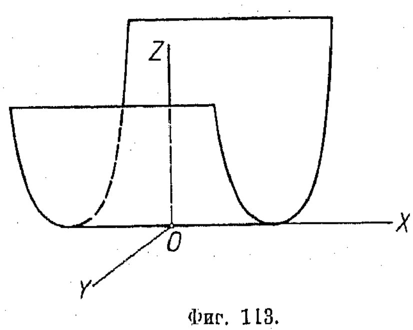


Фиг. 111.

раболоид (фиг. 110), полость которого уходит в бесконечность в сторону положительного направления оси Z, т.-е. вверх, и, следовательно, вершина его, помещающаяся в начале координат, служит самой нижней точкой его. Если оба коэффициента m и n отрицательны, то рассматриваемое уравнение представляет опять эллиптический параболоид (фиг. 111),



Фиг. 112.



Фиг. 113.

но полость его простирается в бесконечность уже вниз, так что вершина его оказывается самой верхней точкой. Если коэффициенты m и n имеют противоположные знаки, то уравнение изображает гиперболический параболоид (фиг. 112 соответствует случаю, когда $m > 0$, а $n < 0$) — седлообразную поверхность; если станем рассекать поверхность пучком плоскостей $y=kx$, проходящих через ось Z, то в сечении получатся: 1) параболы, у которых самая нижняя точка в начале координат, 2) параболы, у которых там же самая верхняя точка, 3) крест из двух прямых, расположенных в плоскости XOY и пересекающихся в той же точке. Таким образом, эта точка — вершина гиперболического параболоида — не представляет экстремум, как это было в обоих случаях эллиптического параболоида. Наконец, фиг. 113 иллюстрирует тот случай, когда коэффициент m и, следовательно, дискриминант Δ равны нулю; на этот раз и тут нет экстремум.

ПРИМЕР 2. Найти экстремум функции $z=xy(g-x-y)$, где g — постоянное.

Мы видели, что эта функция может иметь экстремум в следующих четырех случаях:

$$1)\ x=0,\ y=0,\quad 2)\ x=0,\ y=g,$$
$$3)\ x=g,\ y=0,\quad 4)\ x=\frac{1}{3}g,\ y=\frac{1}{3}g.$$

Для того, чтобы исследовать каждый случай в отдельности, найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g-2x-2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x.$$

В первом случае

$R=0,\ S=g,\ T=0,\ \Delta=-g^2$ (следовательно, нет экстремум);

во втором случае

$R=-2g,\ S=-g,\ T=0,\ \Delta=-g^2$ (нет экстремум);

в третьем случае

$R=0,\ S=-g,\ T=-2g,\ \Delta=-g^2$ (нет экстремум);

в четвертом случае

$$R=-\frac{2}{3}g,\ S=-\frac{1}{3}g,\ T=-\frac{2}{3}g,\ \Delta=\frac{1}{3}g^2\quad \text{(максимум)}.$$

§ 10. Относительный экстремум.

Пример, разобранный в двух предшествующих параграфах, можно решить еще иным путем; именно, поставим ту же геометрическую задачу, которая сводится к отысканию экстремум функции $z=xyu$ трех переменных „относительно“ уравнения $x+y+u=g$, где g—постоянное, т.-е. принимая во внимание, что на аргументы x, y, u наложено условие, что сумма их постоянна. Вместо того, чтобы определять из данного условия аргумент u и подставлять его выражение в функцию, как это мы делали раньше, будем искать экстремум новой функции

$$w=xyu+\lambda(x+y+u),$$

где λ — некоторый постоянный множитель; эта функция отличается то данной только на постоянное λg и, следовательно, обе они имеют экстремум при одних и тех же условиях. Составляем производные последней функции:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=yu+\lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=ux+\lambda, \quad \frac{\partial w}{\partial u}=xy+\lambda.$$

Получаем четыре уравнения с четырьмя неизвестными x, y, u, λ:

$$yu+\lambda=0, \quad ux+\lambda=0, \quad xy+\lambda=0, \quad x+y+u=g$$

или, так как $z=xyu$,

$$-\lambda=\frac{z}{x}=\frac{z}{y}=\frac{z}{u}, \quad x+y+u=g,$$

откуда

$$x=y=u=\frac{1}{3}g.$$

На основании изложенных выше геометрических соображений (§ 8) получаем, что этим значениям аргументов соответствует максимум функции и что другие решения не удовлетворяют условиям задачи.

Рассмотрим теперь этот вопрос в общем виде.

Пусть дана функция $z=f(x, y, u)$ трех переменных, на которые наложено условие $\varphi(x, y, u)=0$. Приняв во внимание, что в случае экстремума $dz=0$ (§ 8), и продифференцировав уравнение $\varphi(x, y, u)=0$, получаем

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial u}du=0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial u}du=0.$$

Множим второе равенство на произвольное число λ и складываем с первым:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)du=0.$$

Подбирая неопределенный множитель λ так, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u}=0,$$

получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy=0.$$

Так как x и y — независимые переменные, то, полагая сперва $dx=\Delta x=1$ и $dy=\Delta y=0$, а затем $dx=0$ и $dy=1$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

Таким образом получаем четыре уравнения с четырьмя неизвестными x, y, u, λ:

$$\varphi(x, y, u) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

К последним трем уравнениям мы пришли бы, если бы стали искать экстремум такой функции:

$$w = f(x, y, u) + \lambda \varphi(x, y, u).$$

Итак, вместо относительного экстремум функции z можно искать абсолютный (безотносительный) экстремум функции w.

ПРИМЕР. Найти размеры цилиндрической кружки данного объема v с тем условием, чтобы материала на нее пошло возможно меньше.

Поверхность кружки $S = \pi x^2 + 2\pi xy$, где x — радиус основания кружки и y — ее высота, а объем $v = \pi x^2 y$; согласно только что полученным результатам, ищем абсолютный экстремум функции

$$w = x^2 + 2xy + \lambda x^2 y:$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2y + 2\lambda xy = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2x + \lambda x^2 = 0;$$

решая три уравнения с тремя неизвестными x, y, λ, получаем

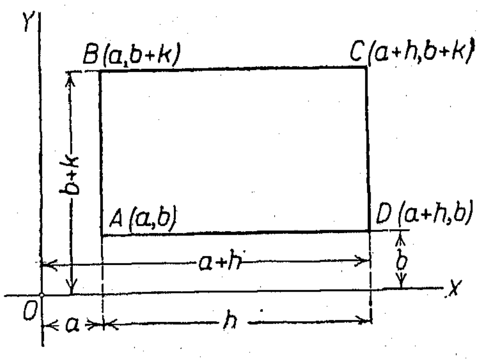
$$x = y = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} \text{ линейных единиц.}$$

Как мы видели (часть вторая, гл. III, § 3), этим числовым значениям аргументов x и y соответствует минимум функции S.

§ 11. Формула Тэлора.

Мы могли бы, как и в случае функции одного независимого переменного, исследовать экстремум при помощи формулы Тэлора для многих (двух) переменных. К выводу этой формулы мы и перейдем, причем будем пользоваться тем же методом, что и раньше, т.-е. сведем вопрос к исследованию функции одного переменного.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, имеющую производные, кончая порядком n в интервалах $(a, a+h)$ и $(b, b+k)$, т.-е. внутри прямоугольника $ABCD$ (фиг. 114).



Фиг. 114.

Пусть x и y — линейные функции нового переменного t:

$$x = a + ht, \quad y = b + kt,$$

причем t изменяется от 0 до 1, когда x и y изменяются соответственно от a до $a+h$ и от b до $b+k$, т.-е. точка с координатами x и y перемещается внутри прямоугольника $ABCD$. Тогда

$$z = f(x, y) = f(a + ht, b + kt) = F(t)$$

и, таким образом, к функции z применима формула Тэлора для случая одного переменного (часть вторая, гл. VI, § 8).

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta z = \frac{dz}{1!} + \frac{d^2z}{2!} + \frac{d^3z}{3!} + \ldots + \frac{d^{n-1}z}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\{d^nz\}_{t+\vartheta\Delta t};$$

в остаточном члене множитель $\{d^nz\}_{t+\vartheta\Delta t}$ представляет дифференциал порядка n с заменой в нем t через $t + \vartheta\Delta t$, где $0 < \vartheta < 1$.

Примем теперь во внимание, что z зависит от t через посредство x и y, являющимися линейными функциями t, т.-е. $z = f(x, y)$, где $x = a + ht$, $y = b + kt$, и что, следовательно, полный дифференциал порядка n и множитель остаточного члена представятся таким образом (§ 6):

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}h\,dt + \frac{\partial}{\partial y}k\,dt\right)^n f(x, y) =$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\,dt^n,$$

$$\{d^nz\}_{t+\vartheta\Delta t} = \left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right\}_{t+\vartheta\Delta t} dt^n.$$

Положим теперь $t = 0$, $\Delta t = dt = 1$:

$$[\Delta z]_{t=0,\ \Delta t=1} = F(1) - F(0) = f(a+h, b+k) - f(a, b),$$

$$[d^nz]_{t=0,\ dt=1} = \left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right]_{x=a,\ y=b} =$$

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a, b),$$

$$\left[\{d^nz\}_{t+\vartheta\Delta t}\right]_{t=0,\ \Delta t=1} = \{d^nz\}_\vartheta = \left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right]_{t=\vartheta} =$$

$$= \left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right]_{x=a+h\vartheta,\ y=b+k\vartheta} =$$

$$= \left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right\}_{a+\vartheta h,\ b+\vartheta k}$$

Подставим найденные выражения в формулу Тэлора:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a, b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^2 f(a, b)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a, b)+$$
$$+\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)\right\}_{a+\vartheta h,\ b+\vartheta k}.$$

Это и есть формула Тэлора для функции двух переменных.

Положив в ней $n=1$, получаем теорему о среднем значении для функции двух переменных

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y)\right\}_{a+\vartheta h,\ b+\vartheta k}$$

или

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=h f_x'(a+\vartheta h, b+\vartheta k)+k f_y'(a+\vartheta h, b+\vartheta k).$$

Если в формуле Тэлора ограничиться двумя членами, т.-е. положить $n=2$, то получим

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a, b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)\right\}_{a+\vartheta h,\ b+\vartheta k}$$

или

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=h f_x'(a, b)+k f_y'(a, b)+$$
$$+\frac{1}{2}[h^2 f_{xx}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)+2hk f_{xy}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)+$$
$$+k^2 f_{yy}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)];$$

если первые производные обращаются в нуль, т.-е.

$$f_x'(a, b)=0, \quad f_y'(a, b)=0,$$

то

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{2}[f_{xx}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^2+$$
$$+2f_{xy}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)hk+f_{yy}''(a+\vartheta h, b+\vartheta k)k^2];$$

так как мы рассматриваем функции только с непрерывными производными, то при достаточно малых h и k знак скобки, стоящей в правой части равенства, а следовательно, и знак разности

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)$$

совпадает со знаком трехчлена

$$Rh^2+2Shk+Tk^2,$$

где $R=f_{xx}''(a, b)$, $S=f_{xy}''(a, b)$, $T=f_{yy}''(a, b)$ (ср. § 9).

§ 12. Неявные функции.

I. Мы видели (часть первая, § 9), что, если уравнение $f(x, y)=0$ определяет функцию y аргумента x, т.-е. если существует такая функция y аргумента x, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество, то y называется неявной функцией x.

Например, уравнение $x^2+y^2-a^2=0$ определяет y, как неявную функцию x, ввиду того, что существует такая функция $y=\sqrt{a^2-x^2}$, которая обращает это уравнение в тождество:

$$x^2+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-a^2=0.$$

Наоборот, в случае уравнения $e^{y+x^2}=0$ нет такой функции, которая удовлетворяла бы ему, так как ни для какого значения двучлена $y+x^2$ показательная функция e^{y+x^2} в нуль не обратится.

На вопросе об условиях существования неявной функции мы останавливаться не станем, а займемся нахождением ее производных в общем случае, когда функция задана уравнением $f(x, y)=0$; на практике, впрочем, проще прямо дифференцировать, как это мы раньше делали (часть вторая, гл. I, § 5, пример 2 и § 6, пример 8), не пользуясь формулами, которые имеют применение к изысканиям общего характера (см. стр. 195 и 204); к выводу этих формул мы и приступаем.

Так как функция $f(x, y)$ равна для всех значений x и y нулю, то ее полный дифференциал (§ 3) тоже равен нулю:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}=-\frac{f_x'}{f_y'};$$

далее (§ 6),

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0,$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}''+2f_{xy}''y'+f_{yy}''y'^2}{f_y'};$$

подставляем сюда найденное выше выражение первой производной y', получим окончательно формулу $\frac{d^2y}{dx^2}$; затем тем же путем ищем $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. Для примера возьмем разобранное во второй части (гл. I, § 6) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

полагая $f(x, y)=\frac{1}{2}(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$, получаем:

$$f_x'=b^2x,\quad f_y'=a^2y,\quad f_{xx}''=b^2,\quad f_{xy}''=0,\quad f_{yy}''=a^2,$$

откуда

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y'' = -\frac{b^2 + a^2\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{a^2y} = -\frac{b^2(b^2x^2 + a^2y^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4a^2}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

II. Если неявная функция z двух аргументов x и y дана уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

то для определения ее частных производных следует поступать точно так же, как и в первом случае; единственная разница состоит только в том, что у неявной функции z будут производные частные, а не обыкновенные, как раньше:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}.$$

Точно таким же путем находим частные производные второго и следующих порядков.

III. Изложенный метод легко распространить и на другие случаи, например, когда даны уравнения

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Вся разница в том, что в первых двух случаях для отыскания производных, мы решали уравнение первой степени с одним неизвестным, а в рассматриваемом случае придется решать систему из двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, т.-е. с производными функций y и z относительно аргумента x:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}y' + \frac{\partial F_1}{\partial z}z' = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}y' + \frac{\partial F_2}{\partial z}z' = 0.$$

§ 13. Дифференциальные выражения.

Мы видели (§ 2), что, если дана функция $z = f(x, y)$, то ее полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{2}$$

т.-е. представляет выражение вида

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy, \tag{6}$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ некоторые функции аргументов x и y.

Но обратное положение не верно: не всякое дифференциальное выражение (6) представляет полный дифференциал, т.-е. не всегда существует такая функция, частные производные которой по аргументам x и

y были бы равны соответственно $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$. Это видно уже из того, что, если такая функция, например, $z=f(x, y)$, существует и, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2(x, y)$, то необходимо, чтобы удовлетворялось так называемое условие интегрируемости

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}; \tag{7}$$

в самом деле, каждая из этих производных равна $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ (§ 5).

Покажем на примере, как найти функцию z, т.-е. интеграл дифференциального выражения (6), при условии существования равенства (7), и таким образом покажем на примере, что условие (7) не только необходимо, но и достаточно.

ПРИМЕР 1. Возьмем дифференциальное выражение

$$(x+y)\,dx+(x-y)\,dy;$$

условие (7) выполнено, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=1.$$

Таким образом, будем искать интеграл данного дифференциального выражения, т.-е. такую функцию z, что

$$dz=(x+y)\,dx+(x-y)\,dy, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=x+y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-y;$$

так как $\frac{\partial z}{\partial x}=x+y$, то $z=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ некоторая функция y, для нахождения которой используем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y)\right]=x+\frac{d\varphi}{dy}=x-y,$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dy}=-y, \quad \varphi(y)=-\frac{1}{2}y^2+C, \quad z=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+C.$$

ПРИМЕР 2. Дифференциальное выражение

$$(x-y)\,dx+(x+y)\,dy$$

не представляет полного дифференциала, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-y)=-1, \quad \text{а} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+y)=1.$$

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

Дифференциальная геометрия в пространстве.

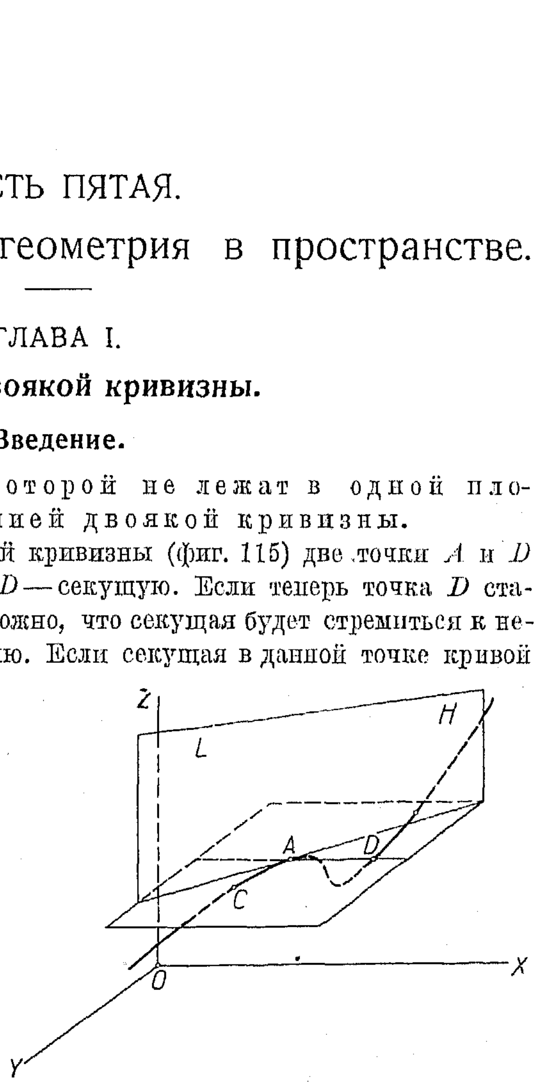
ГЛАВА I.

Линии двоякой кривизны.

Введение.

Кривая, все точки которой не лежат в одной плоскости, называется линией двоякой кривизны.

Возьмем на кривой двоякой кривизны (фиг. 115) две точки A и D и проведем через них прямую AD — секущую. Если теперь точка D станет приближаться к A, то возможно, что секущая будет стремиться к некоторому предельному положению. Если секущая в данной точке кривой стремится к предельной прямой, когда вторая точка пересечения неограниченно приближается к данной точке, то эта предельная прямая называется касательной в данной точке кривой. Углы, образуемые касательной с осями координат, будем обозначать через α, β, γ, и тогда, как известно из аналитической геометрии (Анал. Геом., стр. 165),



Фиг. 115.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

или

$$\Sigma\cos^2\alpha = 1.$$

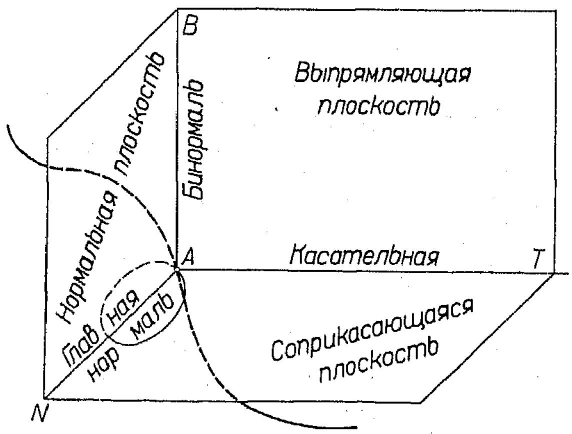
Если мы, кроме точек A и D (фиг. 115), возьмем на кривой еще третью точку C и проведем через них плоскость, то она называется секущей плоскостью. Секущая прямая, как имеющая с секущей плоскостью две общие точки A и D, вся лежит в ней. Если точки D и C будут неограниченно приближаться к A, то возможно, что секущая плоскость будет стремиться к некоторой предельной плоскости AHL; тогда эта последняя называется соприкасающейся плоскостью кривой в данной ее точке A. Касательная, как предельный случай секущей прямой, очевидно, лежит в соприкасающейся плоскости — предельном случае секущей плоскости.

Проведем теперь через точки A, C и D окружность; она будет лежать в секущей плоскости, проходящей через те же точки; пусть точки C и D неограниченно приближаются к точке A; если секущий круг тоже неограниченно приближается к некоторому предельному кругу, то этот последний называется соприкасающимся кругом кривой в данной ее точке A; этот круг расположен, как и касательная, в соприкасающейся плоскости.

Перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания, называется нормалью кривой.

Таких перпендикуляров, как известно из геометрии, можно провести бесчисленное множество, причем они все лежат в одной плоскости, перпендикулярной к касательной. Геометрическое место нормалей к кривой в данной ее точке называется нормальной плоскостью; эта плоскость, таким образом, перпендикулярна касательной; следовательно, она перпендикулярна и соприкасающейся плоскости, которая проходит через касательную. Прямая пересечения обеих плоскостей, как лежащая в нормальной плоскости и проходящая через точку A кривой, принадлежит к числу ее нормалей; эта прямая пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей называется главной нормалью кривой в данной ее точке. Углы главной нормали с осями координат обозначим через ξ, η, ζ; между ними тоже существует соотношение $\Sigma \cos^2 \xi = 1$.

Наконец, нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется бинормалью; бинормаль перпендикулярна касательной и главной нормали, лежащим в соприкасающейся плоскости (фигура 116). Пусть ее углы с осями координат λ, μ, ν; тогда $\Sigma \cos^2 \lambda = 1$.



Фиг. 116.

Если кривая плоская, т.-е. лежит всеми своими точками в некоторой плоскости, то с этой плоскостью сольется секущая плоскость, которая проходит через три точки кривой A, C, D, а следовательно, и соприкасающаяся плоскость; расположенная в ней главная нормаль окажется, таким образом, в плоскости кривой и будет ее нормалью.

Как показывает название, линия двоякой кривизны имеет две кривизны: первую кривизну, соответствующую кривизне плоской кривой, вторую кривизну, или кривизну кручения, которая и отличает ее от плоской кривой.

Первая кривизна в точке кривой, как и у плоских кривых, измеряется пределом отношения угла между касательными, проведенными в точках A и D, из которых вторая неограниченно приближается к первой, к длине дуги между этими точками касания. Если R—радиус первой кривизны K_1, $\Delta\varphi$—угол между касательными, т.-е. угол смежности, Δs—длина дуги AD кривой, то

$$K_1 = \frac{1}{R} = lim_{\Delta s \to 0} \ \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Как и у плоской кривой, радиус R первой первизны служит радиусом соприкасающегося круга — круга кривизны.

Вторая кривизна в точке A кривой определяется, как предел отношения угла между бинормалями в точках A и D к длине дуги AD; поэтому, если T — радиус второй кривизны K_2, аналогичный радиусу R первой кривизны, $\Delta\psi$ угол между бинормалями, т.-е. угол кручения, то

$$K_2 = \frac{1}{T} = lim_{\Delta s \to 0} \ \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds}.$$

У плоской кривой все бинормали параллельны, как перпендикуляры к плоскости кривой, а поэтому

$$\Delta\psi = 0 \text{ и } K_2 = 0.$$

§ 1. Длина дуги.

Как и в случае плоской кривой (часть третья, гл. III, § 4), **под длиной дуги кривой условимся разуметь предел периметра вписанной в эту дугу ломаной, у которой число звеньев неограниченно растет, а каждое звено стремится к нулю.**

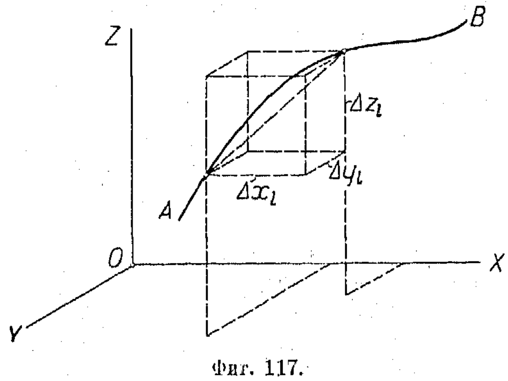
Пусть пространственная кривая дана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{1}$$

где все три функции имеют непрерывные производные

$$x' = \varphi'(t), \quad y' = \psi'(t), \quad z' = \chi'(t)$$

в интервале (t_0, T), соответствующем дуге AB, и пусть вершинами вписанной в кривую AB ломаной служат точки с координатами:



Фиг. 117.

$$a = x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad z_0 = \chi(t_0); \ \ldots ; \ x_l = \varphi(t_l),$$
$$y_l = \psi(t_l), \quad z_l = \chi(t_l); \ \ldots ; \ b = x_n = \varphi(t_n) = \varphi(T), \quad y_n = \psi(T),$$
$$z_n = \chi(T).$$

Тогда периметр вписанной в дугу AB ломаной можно представить, таким образом, как сумму ее звеньев:

$$\sqrt{\Delta x_0^2+\Delta y_0^2+\Delta z_0^2}+\ldots+\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2}+\ldots+$$
$$+\sqrt{\Delta z_{n-1}^2+\Delta y_{n-1}^2+\Delta z_{n-1}^2}=\mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2}.$$

Длина s соответствующей дуги AB, согласно определению, равна пределу этой суммы

$$s=lim_{\Delta t_i\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь такой предел

$$lim_{\Delta_i\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T}\sqrt{dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2}=lim_{\Delta t_i\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)+\chi'^2(t_i)}\,\Delta t_i;$$

этот предел существует, так как

$$lim_{\Delta t_i\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)+\chi'^2(t_i)}\,\Delta t_i=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt;$$

полученный же интеграл, как взятый от непрерывной функции, существует; отсюда следует (часть третья, гл. III, § 2), что предел (2) тоже существует, и длина дуги

$$s=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

Таким образом, как и раньше (часть третья, гл. III, § 4), мы одновременно достигли двух целей: нашли достаточное условие существования предела, при помощи которого определили длину s дуги кривой, и получили формулу (3) для вычисления этой длины. В том случае, если кривая дана уравнениями $y=f_1(x)$, $z=f_2(x)$, т.-е. в случае $t=x$, $\psi(x)=f_1(x)$, $\chi(x)=f_2(x)$ формула (3) принимает вид:

$$=\int_a^b\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx. \tag{4}$$

Дифференцируем формулы (3) и (4) по верхним пределам, т.-е. соответственно по T и b:

$$\frac{ds}{dT}=\sqrt{\varphi'^2(T)+\psi'^2(T)+\chi'^2(T)},\quad \frac{ds}{db}=\sqrt{1+f_1'^2(b)+f_2'^2(b)};$$

заменяем T через t и b через x:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)},\qquad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2+z'^2};$$

отсюда получаем различные выражения дифференциала дуги:

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

или

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{5}$$

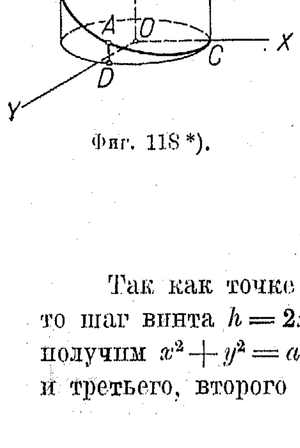
Тем же способом, как и для плоской кривой (часть третья, гл. III, § 4), можно доказать, что предел отношения бесконечно малой дуги кривой двоякой кривизны к стягивающей ее хорде равен единице.

Если кривая дана уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

то производные y_x' и z_x' вычисляются тем приемом, который указан выше (часть четвертая, § 12, II).

ПРИМЕР. Возьмем плоскую кривую и отметим на ней точку C — начало счета дуг; станем в каждой точке D кривой восставлять перпендикуляр к плоскости (бинормаль плоской кривой) и на ней откладывать отрезок DA, пропорциональный дуге CD; геометрическое место концов A перпендикуляров называется винтовой линией. Мы рассмотрим простейший случай обыкновенной винтовой линии, когда направляющей плоской кривой служит окружность. Примем плоскость круга за плоскость XOY, начало координат поместим в центре его, а ось X проведем через точку C — начало счета дуг; тогда осью Z будет служить ось построенного на окружности цилиндра, служащего геометрическим местом ее бинормалей и, следовательно, поверхностью, на которой расположена винтовая линия (фиг. 118).



Фиг. 118 *).

Обозначим через a радиус круга, через h шаг винта, т.-е. отрезок CK, через c множитель пропорциональности, так что $DA = c \cdot CD$, через t амплитуду точки D, т.-е. угол*) COD, а через x, y, z — координаты произвольной точки A винтовой линии. Тогда ее параметрические уравнения примут такой вид:

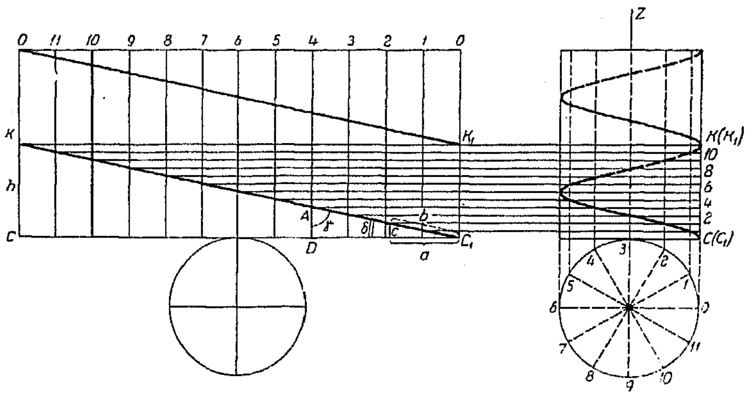
$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct.$$

Так как точке K соответствует значение параметра t, равное 2π, то шаг винта $h = 2\pi c$. Если из первых двух уравнений исключить t, то получим $x^2 + y^2 = a^2$; повторяя то же исключение относительно первого и третьего, второго и третьего уравнений, приходим к уравнениям

$$x = a\cos\frac{z}{c}, \quad y = a\sin\frac{z}{c},$$

*) На чертеже пропущен радиус OD.

т.-е. проекциями винтовой линии на плоскости XOY, XOZ и YOX служат соответственно круг, косинусоида (см. фиг. 119) и синусоида.



Фиг. 119.

Найдем теперь длину дуги винтовой линии от начальной точки C до произвольной A; так как

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = c\,dt$$

и

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2}\,dt = b\,dt,$$

где $b = \sqrt{a^2 + c^2}$, то длина дуги CA

$$s = \int_0^t b\,dt = bt.$$

Ввиду этого параметрические уравнения винтовой линии можно написать в таком виде

$$x = a\cos\frac{s}{b}, \quad y = a\sin\frac{s}{b}, \quad z = \frac{c}{b}\,s.$$

Отсюда также следует, что окружность $2\pi a$ и шаг h служат катетами CC_1 и CK прямоугольного и треугольника CC_1K, гипотенуза C_1K которого при наложении его на круглый цилиндр даст винтовую линию (фиг. 119).

§ 2. Касательная прямая и нормальная плоскость.

Возьмем (фиг. 120) на кривой (1) две точки

$$A\,(x, y, z) \text{ и } D\,(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

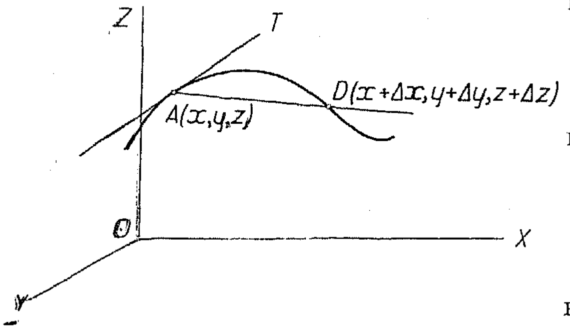
и проведем через них секущую (Анал. Геом., стр. 200)

$$\frac{X - x}{x_1 - x} = \frac{Y - y}{y_1 - y} = \frac{Z - z}{z_1 - z},$$

где X, Y, Z текущие координаты, а $x_1 = x + \Delta x$, $y_1 = y + \Delta y$, $z_1 = z + \Delta z$ разделим все знаменатели этих уравнений на Δt:

$$\frac{X - x}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y - y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z - z}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Если перейдем теперь к пределу, полагая, что $\Delta t \to 0$ и, следовательно, точка $D \to A$, то секущая обратится в касательную, и уравнения касательной будут



Фиг. 120.

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)}=\frac{Y-y}{\psi'(t)}=\frac{Z-z}{\chi'(t)} \tag{6}$$

или

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

Отсюда (Анал. Геом., стр. 196) направляющие косинусы касательной

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{7}$$

где $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ — дифференциал дуги [§ 1, формула (5)]. Уравнение нормальной плоскости будет (Анал. Геом., стр. 204):

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0.$$

В случае винтовой линии (§ 1)

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=-\frac{a}{b}\sin\frac{s}{b},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}=\frac{a}{b}\cos\frac{s}{b},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{c}{b};$$

следовательно, касательная винтовой линии образует с осью цилиндра постоянный угол $\gamma=\arccos\frac{c}{b}$, дополняющий до 90° угол δ подъема винтовой линии; ту же теорему можно формулировать таким образом: винтовая линия пересекает образующие цилиндра под одним и тем же углом

$$\gamma=\arccos\frac{c}{b}\quad (\text{фиг. } 119).$$

§ 3. Соприкасающаяся плоскость и бинормаль.

Пусть дано уравнение связки плоскостей, проходящих через точку A (фиг. 120) кривой (1) (Аналит. Геом., стр. 189),

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0; \tag{8}$$

чтобы выбрать из этой связки пучок плоскостей, проходящих через касательную (6), наложим на коэффициенты A, B, C требование (Анал. Геом., стр. 206):

$$A\,\varphi'(t)+B\,\psi'(t)+C\,\chi'(t)=0; \tag{9}$$

к этому пучку принадлежит и соприкасающаяся плоскость; чтобы получить ее уравнение, предварительно выберем из пучка плоскость, проходящую через точку (фиг. 120) $D(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ кривой (1), т.-е. наложим требование

$$A(x+\Delta x-x)+B(y+\Delta y-y)+C(z+\Delta z-z)=0$$

или

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0;$$

выразим приращения Δx, Δy, Δz по формуле Тэлора через их производные, кончая вторым порядком (часть вторая, гл. II, § 4)

$$A\left(h\,\varphi'(t)+\frac{1}{2}h^2\varphi''(t+\vartheta h)\right)+B\left(h\,\psi'(t)+\frac{1}{2}h^2\psi''(t+\vartheta_1 h)\right)+$$
$$+C\left(h\,\chi'(t)+\frac{1}{2}h^2\chi''(t+\vartheta_2 h)\right)=0,$$

где $h=\Delta t$, а остаточный член взят в форме Лагранжа, причем числа ϑ, ϑ_1, ϑ_2 заключены между 0 и 1.

Вычтем из полученного равенства уравнение (9), предварительно помноживши его на h:

$$\frac{1}{2}h^2A\,\varphi''(t+\vartheta h)+\frac{1}{2}h^2B\,\psi''(t+\vartheta_1 h)+\frac{1}{2}h^2C\,\chi''(t+\vartheta_2 h)=0$$

или

$$A\,\varphi''(t+\vartheta h)+B\,\psi''(t+\vartheta_1 h)+C\,\chi''(t+\vartheta_2 h)=0.$$

Это есть в преобразованном виде условие того, что плоскость пучка, у которого осью служит касательная, проходит через точку D; для того, чтобы получить соприкасающуюся плоскость, перейдем к пределу, полагая что $D\to A$ и, следовательно, $h\to 0$:

$$A\,\varphi''(t)+B\,\psi''(t)+C\,\chi''(t)=0. \qquad (10)$$

Если производные заменим дифференциалами, то уравнения (9) и (10) преобразуются в такие:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \qquad (9')$$
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0. \qquad (10')$$

Из этих двух уравнений первой степени легко определить отношение двух коэффициентов к одному их них, например, $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, и найденные выражения подставить в равенство (8); таким образом получится уравнение соприкасающейся плоскости. В заключение напишем уравнения бинормали (Ан. Геом., стр. 204)

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}=\frac{Z-z}{C};$$

направляющие косинусы ее (Анал. Геом., стр. 196)

$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{11}$$

где A, B и C определяются уравнениями (9') и (10'); вычислять эти коэффициенты мы не станем.

В случае винтовой линии

$$x = a\cos\frac{s}{b}, \qquad y = a\sin\frac{s}{b}, \qquad z = \frac{c}{b}s,$$
$$dx = -\frac{a}{b}\sin\frac{s}{b}\,ds, \qquad dy = \frac{a}{b}\cos\frac{s}{b}\,ds, \qquad dz = \frac{c}{b}\,ds,$$
$$d^2x = -\frac{a}{b^2}\cos\frac{s}{b}\,ds^2, \quad d^2y = -\frac{a}{b^2}\sin\frac{s}{b}\,ds^2, \quad d^2z = 0,$$

и ур-ния (9') и (10') после сокращения соответственно на $\frac{ds}{b}$ и $-\frac{a}{b^2}ds^2$ принимают такой вид:

$$-Aa\sin\frac{s}{b} + Ba\cos\frac{s}{b} + Cc = 0,$$
$$A\cos\frac{s}{b} + B\sin\frac{s}{b} = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{-c\sin\frac{s}{b}} = \frac{B}{c\cos\frac{s}{b}} = \frac{C}{-a}.$$

Если положить знаменатель этих отношений, равным 1, то

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{c^2\sin^2\frac{s}{b} + c^2\cos^2\frac{s}{b} + a^2} = \sqrt{c^2+a^2} = b,$$

и, следовательно,

$$\cos\lambda = -\frac{c}{b}\sin\frac{s}{b}, \quad \cos\mu = \frac{c}{b}\cos\frac{s}{b}, \quad \cos\nu = -\frac{a}{b},$$

т. е. бинормаль винтовой линии образует с образующей цилиндра постоянный угол $\nu = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$.

§ 4. Главная нормаль.

Для упрощения дальнейших исследований примем за независимое переменное дугу s кривой (1); тогда из формулы (5)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

следует

$$2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y + 2\,dz\,d^2z = 2\,ds\,d^2s$$

или, так как $d^2s=0$,
$$dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z=0; \tag{12}$$
кроме того, d^2x, d^2y, d^2z удовлетворяют, как мы видели, уравнению
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0. \tag{10'}$$

Напишем теперь условия (Анал. Геом., стр. 199) перпендикулярности главной нормали к касательной
$$dx\cdot\cos\xi+dy\cdot\cos\eta+dz\cdot\cos\zeta=0$$
и к бинормали
$$A\cos\xi+B\cos\eta+C\cos\zeta=0;$$
сопоставляя полученные уравнения с (12) и (10'), получаем
$$\frac{\cos\xi}{d^2x}=\frac{\cos\eta}{d^2y}=\frac{\cos\zeta}{d^2z}.$$

Следовательно, главная нормаль изобразится такими уравнениями
$$\frac{X-x}{d^2x}=\frac{Y-y}{d^2y}=\frac{Z-z}{d^2z},$$
а направляющие косинусы ее
$$\cos\xi=R\frac{d^2x}{ds^2},\quad \cos\eta=R\frac{d^2y}{ds^2},\quad \cos\zeta=R\frac{d^2z}{ds^2}, \tag{13}$$
где нормирующий множитель[1]) (Анал. Геом., стр. 196)
$$R=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}. \tag{14}$$

Следует не забывать, что полученные формулы верны, когда за независимое переменное принята дуга s, так что $ds=\Delta s$ и $d^2s=0$.

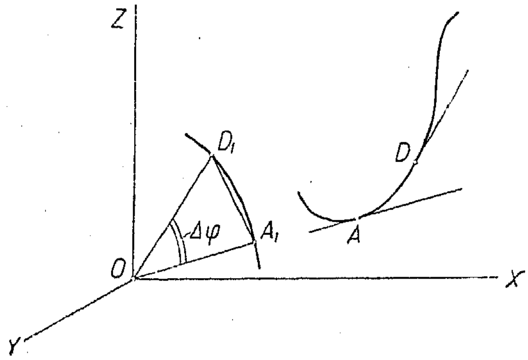
В случае винтовой линии (§ 3)
$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{a}{b^2}\cos\frac{s}{b},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{a}{b^2}\sin\frac{s}{b},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0,$$
$$\frac{1}{R}=\sqrt{\frac{a^2}{b^4}\cos^2\frac{s}{b}+\frac{a^2}{b^4}\sin^2\frac{s}{b}}=\frac{a}{b^2},$$
$$\cos\xi=-\cos\frac{s}{b},\quad \cos\eta=-\sin\frac{s}{b},\quad \cos\zeta=0,$$
т.-е. главная нормаль винтовой линии перпендикулярна образующей цилиндра и, следовательно, параллельна плоскости его основания.

---

[1]) Как увидим ниже (§ 5), R есть радиус первой кривизны.

§ 5. Первая кривизна.

Возьмем на кривой (1) точки $A(x, y, z)$ и $D(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ и построим в этих точках касательные (фиг. 121). Проведем через начало координат две прямые, соответственно параллельные касательным, так что угол между ними есть угол смежности $\Delta\varphi$, и отложим на них отрезки соответственно OA_1 и OD_1, каждый в одну единицу длины. Тогда координаты точки A_1 будут $x_1=\cos\alpha$, $y_1=\cos\beta$, $z_1=\cos\gamma$, где α, β, γ — углы касательной, а следовательно, и вектора OA_1 с осями координат.



Фиг. 121.

Положим теперь, что точка D перемещается по кривой до совпадения с точкой A; тогда точка D_1 опишет некоторую кривую D_1A_1; обозначим ее дугу через s_1; тогда [§ 1, формула (5)]

$$ds_1=\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}.$$

С другой стороны, первая кривизна (стр. 193)

$$K_1=lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=lim\frac{\Delta\varphi}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot lim\frac{\overline{A_1D_1}}{\Delta s_1}\cdot lim\frac{\Delta s_1}{\Delta s};$$

где $\overline{A_1D_1}=2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ хорда дуги $\smile{A_1D_1}=\Delta s_1$; так как

$$lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}=1$$

(часть первая, § 8, пример 1) и с другой стороны (стр. 195)

$$lim_{\Delta s_1\to 0}\frac{\overline{A_1D_1}}{\Delta s_1}=1,$$

то

$$K_1=lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s_1}{\Delta s}=\frac{ds_1}{ds}=\frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}{ds}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}. \qquad (15)$$

Если s независимое переменное, то на основании формул (7)

$$K_1=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2};$$

так как [1]) $\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{d^2x}{ds^2}$ и т. д.

Таким образом формула (14) представляет выражение радиуса кривизны. если дуга s независимое переменное. В случае винтовой линии $R=\frac{b^2}{a}$ (§ 4) и, следовательно, у ней первая кривизна постоянна.

§ 6. Вторая кривизна.

Вторая кривизна выражается точно таким же образом, как и первая, только вместо угла смежности $\Delta\varphi$ между двумя касательными берется угол кручения $\Delta\psi$ между двумя бинормалями (стр. 193):

$$K_2=\frac{1}{T}=lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s}=\frac{d\psi}{ds},$$

и поэтому величину радиуса второй кривизны мы получим из формулы (15), заменяя направляющие косинусы касательной такими же косинусами бинормали:

$$T=\frac{ds}{\sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2}}.$$

Дальнейшее преобразование — подстановку значений направляющих косинусов (11) бинормали — мы проводить не будем.

В случае винтовой линии (§ 3)

$$\cos\lambda=-\frac{c}{b}\sin\frac{s}{b},\quad \cos\mu=\frac{c}{b}\cos\frac{s}{b},\quad \cos\nu=-\frac{a}{b};$$

следовательно,

$$d\cos\lambda=-\frac{c}{b^2}\cos\frac{s}{b}\,ds,\quad d\cos\mu=-\frac{c}{b^2}\sin\frac{s}{b}\,ds,\quad d\cos\nu=0,$$

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{ds}\sqrt{\frac{c^2}{b^4}\cos^2\frac{s}{b}+\frac{c^2}{b^4}\sin^2\frac{s}{b}}\,ds=\frac{c}{b^2};$$

таким образом, $T=\frac{b^2}{c}$, т.-е. у винтовой линии обе (§ 5) кривизны постоянны

[1]) Если s зависимое переменное, то (часть вторая, гл. VI, § 7, I)

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{ds\,d^2x-d^2s\,dx}{ds^3}.$$

ГЛАВА II.

Поверхности.

§ 1. Нормаль и касательная плоскость.

Нормалью к поверхности в данной ее точке называется нормаль ко всякой кривой, проведенной на поверхности через эту точку.

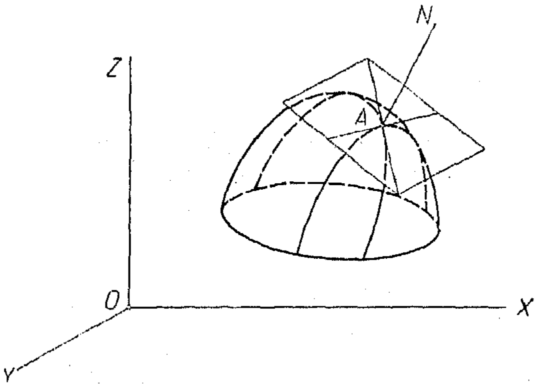
Пусть поверхность (фиг. 122) дана уравнением

$$F(x, y, z) = 0$$

или, в том случае, если оно решено относительно аппликаты,

$$z = f(x, y). \qquad (1)$$

Пусть нормаль AN к поверхности образует с осями координат углы a, b, c. Берем на поверхности (1) точку $A(x, y, z)$ и произвольную кривую, проходящую через эту точку: направляющие косинусы касательной к кривой в точке A будут (гл. I, § 2):



Фиг. 122.

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

так как, согласно определению, нормаль к поверхности служит одной из нормалей к проведенной кривой, то (Анал. Геом., стр. 199)

$$\cos a\, dx + \cos b\, dy + \cos c\, dz = 0.$$

Так как кривая расположена на поверхности (1), то дифференциал аппликаты связан соотношением (часть четвертая, § 2)

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

где p и q — частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Отсюда

$$\cos a\, dx + \cos b\, dy + \cos c\,(p\,dx + q\,dy) = 0$$

или

$$(\cos a + p \cos c)\, dx + (\cos b + q \cos c)\, dy = 0.$$

Так как x и y независимые переменные, то $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$; полагая один раз $dx = 1$ и $dy = 0$, а другой раз $dx = 0$ и $dy = 1$, получаем:

$$\cos a + p \cos c = 0, \quad \cos b + q \cos c = 0;$$

отсюда

$$\cos a = -p \cos c \quad \text{и} \quad \cos b = -q \cos c$$

и, так как $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, то

$$p^2 \cos^2 c + q^2 \cos^2 c + \cos^2 c = 1$$

или

$$(p^2 + q^2 + 1) \cos^2 c = 1;$$

таким образом, направляющие косинусы нормали к поверхности

$$\cos a = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos b = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos c = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

причем знак у радикала и, следовательно, положительное направление нормали выбирают таким образом, чтобы угол между нею и осью Z был острый, т.-е. $\cos c > 0$. Следовательно, нормаль к поверхности изобразится такими уравнениями:

$$\frac{X - x}{-p} = \frac{Y - y}{-q} = \frac{Z - z}{1}$$

или (часть четвертая, § 12, II)

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}.$$

Касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке называется плоскость, проходящая через эту точку перпендикулярно к нормали. Следовательно (Анал. Геом., стр. 204), ее уравнение таково

$$Z - z = p(X - x) + q(Z - z)$$

или

$$F'_x (X - x) + F'_y (Y - y) + F'_z (Z - z) = 0.$$

Так как нормаль в данной точке поверхности перпендикулярна к касательной любой кривой, проведенной на поверхности через эту точку, то касательная плоскость поверхности в данной ее точке служит геометрическим местом касательных к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

ПРИМЕР 1. Найти нормаль и касательную плоскость к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Так как $F_x'=\frac{2x}{a^2}$, $F_y'=\frac{2y}{b^2}$, $F_z'=\frac{2z}{c^2}$, то уравнения нормали

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}},$$

уравнение же касательной плоскости

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$$

или

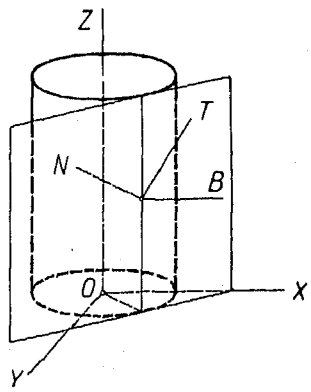
$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

т.-е.

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1. \tag{2}$$

ПРИМЕР 2. Если возьмем круглый цилиндр $x^2+y^2=a^2$, то уравнение касательной плоскости будет отличаться от полученного уравнения (2), как легко сообразить, только отсутствием члена с аппликатой и тем, что $b=a$:

$$Xx+Yy=a^2.$$



Фиг. 123.

В этой плоскости лежит касательная к винтовой линии, расположенной на цилиндре, которую мы изучали в гл. I, а также ее бинормаль; первое вытекает из только что доказанного свойства касательной плоскости к поверхности, а второе из равенства (Анал. Геом., стр. 266)

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+0\cdot\cos\nu=0$$

или

$$a\cos\frac{s}{b}\cdot\left(-\frac{c}{b}\sin\frac{s}{b}\right)+a\sin\frac{s}{b}\cdot\left(\frac{c}{b}\cos\frac{s}{b}\right)+0\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=0,$$

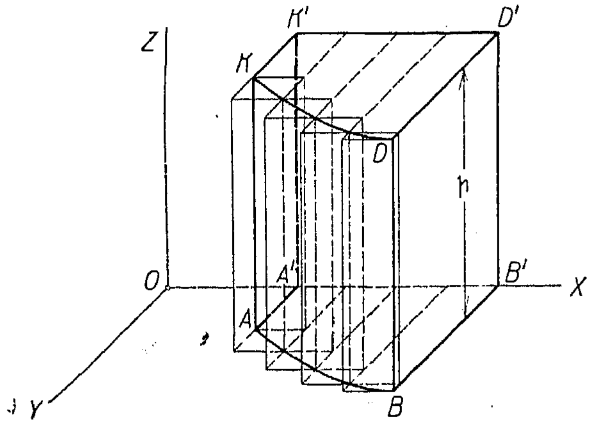
так как $x=a\cos\frac{s}{b}$, $y=a\sin\frac{s}{b}$ (гл. I, § 1), а направляющие косинусы бинормали (гл. I, § 3)

$$\cos\lambda=-\frac{c}{b}\sin\frac{s}{b},\quad \cos\mu=\frac{c}{b}\cos\frac{s}{b};\quad \cos\nu=-\frac{a}{b}.$$

Таким образом, касательная плоскость круглого цилиндра служит выпрямляющей плоскостью (гл. I, введение) расположенной на нем винтовой линии и, следовательно, перпендикулярна к главной нормали ее.

§ 2. Объем цилиндра.

В элементарной геометрии доказывается, что *объем круглого цилиндра равен произведению площади основания на высоту*. Докажем, что это правильно и для всякого цилиндра.

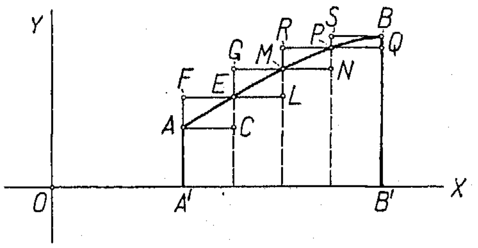


Фиг. 124.

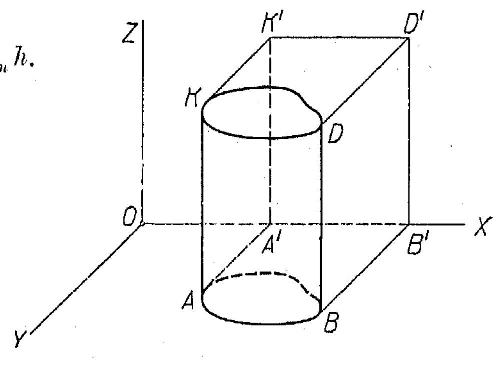
Возьмем в плоскости XOY (фиг. 124) кривую трапецию $A'ABB'$ и построим на ней цилиндр $A'ABB'D'K'KD$; обозначим площадь основания и высоту цилиндра соответственно через σ и h.

Разобьем кривую трапецию $A'ABB'$ на n частей и построим вписанную и описанную около нее ступенчатые фигуры $A'ACELMNPQ$ и $AFEGMRPSB$ (фиг. 125), как это мы делали раньше (часть третья, гл. II, § 1), и затем на этих фигурах в свою очередь строим вписанную и описанную около цилиндра призмы; обозначим соответственно через v_n и V_n, σ_n и Σ_n их объемы и площади их оснований; как известно из элементарной геометрии,

$$v_n = \sigma_n h, \quad V_n = \Sigma_n h.$$



Фиг. 125.



Фиг. 126.

Если обозначим через v объем цилиндра, то, как видно из чертежа (фиг. 124),

$$v_n < v < V_n \quad \text{или} \quad \sigma_n h < v < \Sigma_n h.$$

Так как $lim_{n\to\infty}\sigma_n = lim_{n\to\infty}\Sigma_n = \sigma$ (часть третья, гл. II, § 1), то (часть первая, § 8, теорема 5)

$$v = \sigma h.$$

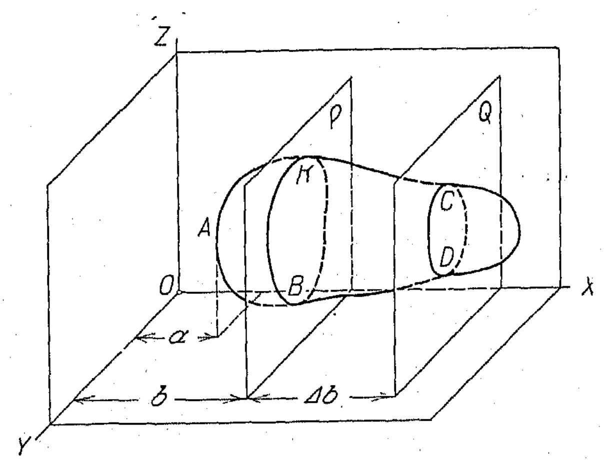
Так как объем всякого цилиндра может быть представлен в виде суммы или разности объемов рассмотренного типа (фиг. 126), то *объем* всякого цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

ПРИМЕР. Вычислить объем эллиптического цилиндра.

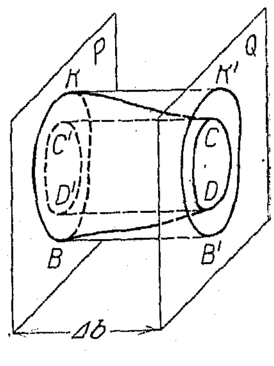
Так как площадь эллипса равна πab (часть третья, гл. III, § 1), где a и b — его полуоси, то искомый объем равен πabh, где h — высота цилиндра.

§ 3. Объем тела.

Дано тело AKB (фиг. 127_{I}) объема v, расположенное между плоскостями $x=a$ и[1] $x=b$. Будем рассекать его плоскостями, параллельными плоскости YOZ; тогда получатся различные сечения в зависимости от расстояния между плоскостью сечения и началом координат, т.-е. в зависимости от того, какова абсцисса x точек, расположенных на этой плоскости; следовательно, площадь сечения есть функция абсциссы x. Обозначим эту функцию через $\sigma(x)$, а через P плоскость $x=b$ и возьмем другую плоскость Q, также параллельную плоскости YOZ и отстоящую от нее и, следовательно, от начала координат на расстоянии $b+\Delta b$; тогда площади KB и CD сечений будут соответственно $\sigma(b)$ и $\sigma(b+\Delta b)$. Спроектируем каждое сечение на другую секущую плоскость и построим на них цилиндры $KBB'K'$ и $C'D'DC$; обозначим объемы этих цилинд-



Фиг. 127_{I}.



Фиг. 127_{II}.

ров, а также слоя, заключенного между теми же плоскостями P и Q, соответственно через v_1, v_2 и Δv; из чертежа видно, что $v_1 > \Delta v > v_2$; так как (§ 2) $v_1 = \sigma(b)\,\Delta b$ и $v_2 = \sigma(b+\Delta b)\,\Delta b$, то

$$\sigma(b)\,\Delta b > \Delta v > \sigma(b+\Delta b)\,\Delta b$$

или

$$\sigma(b) > \frac{\Delta v}{\Delta b} > \sigma(b+\Delta b).$$

[1] На фиг. 127_{I} изображена только одна плоскость $x=b$, именно P.

Перейдем к пределу, полагая, что Δb стремится к нулю, т.-е. будем неограниченно приближать плоскость Q к неподвижной плоскости P; так как $lim_{\Delta b \to 0}\,\sigma(x+\Delta b)=\sigma(b)$, то (часть первая, § 8, теорема 5)

$$lim_{\Delta b \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta b}=\sigma(b) \quad \text{или} \quad \frac{dv}{db}=\sigma(b).$$

Рассмотрим теперь такой интеграл

$$\int_a^b \sigma(x)\,dx$$

и возьмем от него производную по верхнему пределу (часть третья, гл. II, § 2)

$$\frac{d}{db}\int_a^b \sigma(x)\,dx=\sigma(b);$$

следовательно (часть вторая, гл. II, § 5, теорема 2),

$$v=\int_a^b \sigma(x)\,dx+A,$$

где A — постоянное; чтобы найти его числовую величину, положим $b=a$; тогда объем и интеграл обращаются в нуль, и, следовательно, $A=0$, т.-е.

$$v=\int_a^b \sigma(x)\,dx.$$

ПРИМЕР. Вычислить объем эллипсоида.

Если рассечь эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостью, параллельною плоскости YOZ и отстоящею от нее на расстоянии x, то в сечении получится эллипс с полуосями

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}};$$

следовательно, площадь сечения

$$\sigma(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\;c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

а объем

$$v=\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\,\Big|_{-a}^{+a}\left(x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{a^2}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

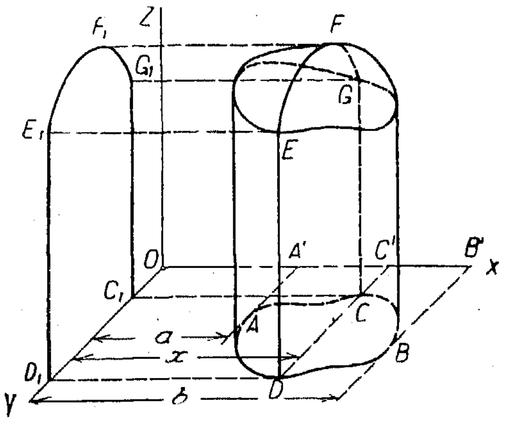
§ 4. Объем кривого цилиндра.

Кривоповерхностным или **кривым цилиндром** называется цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости, обычно в плоскости XOY, а другое на какой-нибудь поверхности $z=f(x, y)$ (фиг. 128).

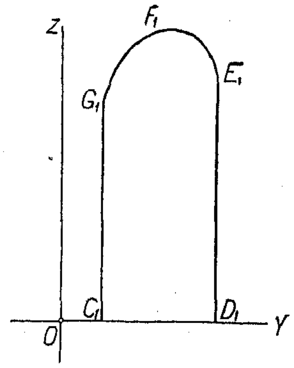
Проведем к контуру[1]) $ACBD$ основания, расположенного в плоскости XOY, касательные, параллельные оси Y, и разобьем таким образом этот контур на две части ACB и ADB; пусть уравнения касательных $A'A$ и $B'B$, дуг ACB и ADB будут соответственно

$$x = a \text{ и } x = b, \quad y = y_1(x) \text{ и } y = y_2(x).$$

Проведем на расстоянии x от плоскости YOZ параллельную ей секущую плоскость $CGFED$, которая с поверхностью $z = f(x, y)$ пересекается по кривой GFE; эта кривая спроектируется на плоскость YOZ без искажения в кривую $G_1F_1E_1$, и площадь $\sigma(x)$ кривой трапеции $CGFED$ равна площади ее проекции на ту же плоскость $C_1G_1F_1E_1D_1$.



Фиг. 128.



Фиг. 129.

Определим эту площадь $\sigma(x)$; уравнение кривой $G_1F_1E_1$, если ее рассматривать в плоскости YOZ (фиг. 129), $z = f(x, y)$, где x — параметр, определяющий положение плоскости сечения $CGFED$ и, следовательно, кривую $G_1F_1E_1$, принадлежащую к семейству кривых сечения. Кроме того, из чертежа (фиг. 128) видно, что

$$OC_1 = C'C = y_1(x) \text{ и } OD_1 = C'D = y_2(x),$$

откуда

$$\sigma(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Так как (§ 3) объем кривого цилиндра

$$v = \int_a^b \sigma(x)\, dx,$$

то получаем окончательное выражение его при помощи **двукратного** интеграла

$$v = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

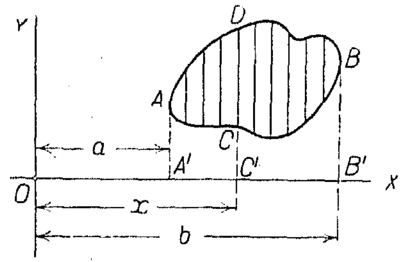
[1]) Контур, как всегда (часть третья, гл. III, § 1), пересекается прямой, параллельной оси Y, в двух точках.

или

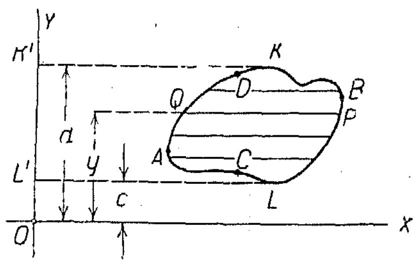
$$v=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z\,dy, \tag{1}$$

где $z=f(x, y)$.

Рассмотрим подробнее полученную формулу (1). В ней интеграция совершается сперва по y, а x остается постоянным; другими словами, интеграция совершается по отрезку CD (фиг. 130) прямой, параллельной оси Y и отстоящей от нее на расстоянии x, причем длина этого отрезка определяется пределами внутреннего интеграла $y_1(x)=C'C$ и $y_2(x)=C'D$. Далее совершается интеграция по x, т.-е. суммируются все полоски, параллельные оси Y и помещающиеся внутри контура $ACBD$.



Фиг. 130.



Фиг. 131.

Очевидно, что мы можем вычислить объем в другом порядке: сперва суммировать по полоскам, параллельным оси X, т.-е. интегрировать по x, а затем суммировать самые полоски, т.-е. интегрировать по y (фиг. 131). Если уравнения касательных $L'L$ и $K'K$ к контуру $ACLPBKDQ$, параллельных оси X, а также дуг $LCAQDK$ и $KBPL$ соответственно $y=c$ и $y=d$, $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$, то, аналогично формуле (1), получим

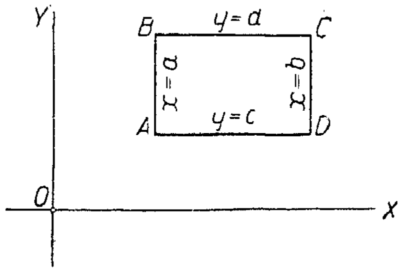
$$v=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z\,dx. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), мы видим, что **при перемене порядка интегрирования меняются пределы.**

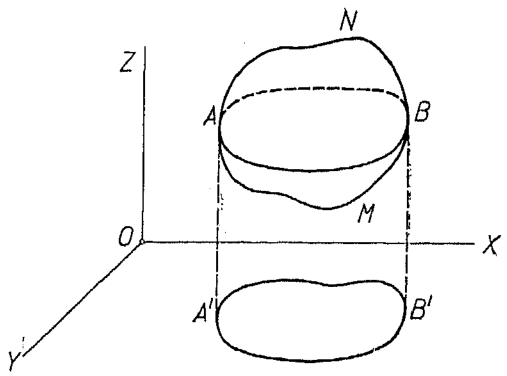
Так как пределы внутреннего интеграла устанавливаются при помощи уравнений кривых, составляющих контур основания цилиндра, то в общем случае эти пределы переменны. Они бывают постоянны только тогда, когда площадь интеграции, т.-е. площадь $ACBD$ (фиг. 128, 130, 131) — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям (фиг. 132); в этом случае, если уравнения сторон $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, объем

$$v=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3}$$

Так как объем всякого тела может быть представлен в виде алгебраической суммы объемов кривых цилиндров, то полученные формулы применимы для нахождения объемов любых тел. Например (фиг. 133), если обозначим через v, v_1 и v_2 объемы соответственно тела $AMBN$ и цилиндров $A'ANBB'$, $A'AMBB'$, то $v = v_1 - v_2$.



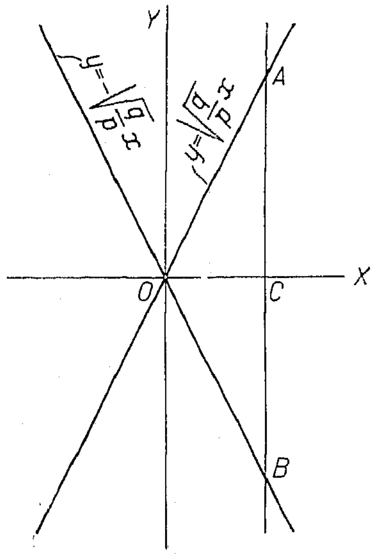
Фиг. 132.



Фиг. 133.

ПРИМЕР. Найти объем v, ограниченный гиперболическим параболоидом $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ и плоскостями XOY и $x = r$.

Так как плоскость XOY, т.-е. $z = 0$, пересекается с гиперболическим параболоидом по прямым $y = \sqrt{\frac{q}{p}}\,x$ и $y = -\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$, то площадью интеграции служит треугольник OAB со сторонами $y = -\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$, $y = \sqrt{\frac{q}{p}}\,x$ и $x = r$; следовательно,



Фиг. 134.

$$v = \frac{1}{2}\int_0^r dx \int_{-\sqrt{\frac{q}{p}}x}^{+\sqrt{\frac{q}{p}}x} \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r \left|_{-\sqrt{\frac{q}{p}}x}^{+\sqrt{\frac{q}{p}}x} \left(\frac{x^2}{p}\,y - \frac{1}{3q}\,y^3\right) dx =\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r \left[\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}\,x^3 - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}\,x^3\right) - \left(-\frac{q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}\,x^3 + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}\,x^3\right)\right] dx =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}\int_0^r x^3 dx = \frac{1}{6}\,\frac{q^{\frac{1}{2}} r^4}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Если переменить порядок интеграций, то интеграл придется разбить на два; у одного из них площадью интеграции будет служить треугольник OAC, а у другого OBC:

$$v = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{q}{p}}\,r} dy \int_{\sqrt{\frac{p}{q}}\,y}^{r} \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\right) dx +$$

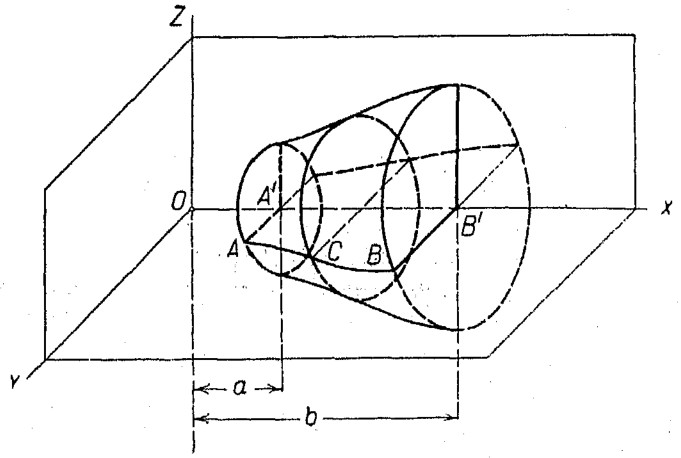
$$+ \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{\frac{q}{p}}\,r}^{0} dy \int_{-\sqrt{\frac{p}{q}}\,y}^{r} \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\right) dx.$$

Результат $v = \frac{1}{6}\,\frac{q^{\frac{1}{2}} r^4}{p^{\frac{3}{2}}}$ получится, конечно, и тут, но более сложным путем.

Так как плоскость XOZ служит плоскостью симметрии рассматриваемого однополостного гиперболоида, то проще всего было бы принять за площадь интеграции треугольник OAC и полученный интеграл помножить на 2.

§ 5. Объем тела вращения.

Дана кривая $y = f(x)$, и пусть ее дуга AB (фиг. 135) вращается около оси X; тогда каждая точка $C(x, y)$ опишет окружность радиуса,



Фиг. 135.

равного ее ординате y; соответствующая дуге AB кривая трапеция $A'ABB'$ опишет тело, называемое телом вращения. В данном случае (§ 3) $\sigma(x) = \pi y^2$, и поэтому объем v тела вращения около оси X, расположенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, представится такой формулой:

$$v = \int_a^b \sigma(x)\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx. \qquad (4)$$

ПРИМЕР. Найти объем параболоида вращения $x^2+y^2=2pz$, ограниченный плоскостью $z=h$.

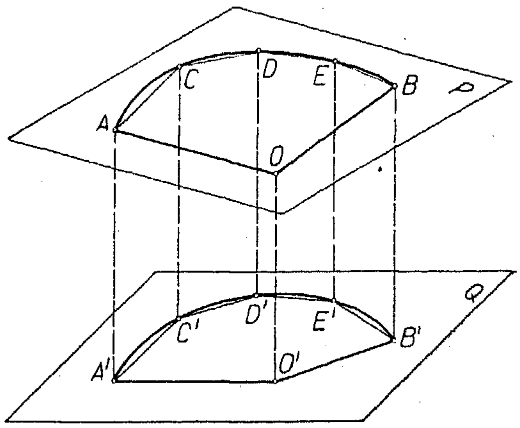
Так как рассматриваемая поверхность получается от вращения параболы $x=\sqrt{2pz}$ около оси Z, то искомый объем выразится таким образом:

$$v=\pi\int_0^h\left(\sqrt{2pz}\right)^2dz=2\pi p\int_0^h z\,dz=\pi ph^2.$$

Обозначим через r радиус сечения параболоида плоскостью $z=h$; тогда $r=\sqrt{2ph}$, откуда $h=\frac{r^2}{2p}$; следовательно, объем параболической чаши $v=\pi p\frac{r^2}{2p}h=\frac{1}{2}\pi r^2h$ вдвое меньше объема цилиндра с тем же основанием и высотой.

§ 6. Проекция плоской фигуры на другую плоскость.

В аналитической геометрии (Анал. Геом., стр. 162) доказывается, что проекция площади расположенного в плоскости многоугольника на другую плоскость равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла между плоскостями.



Фиг. 136.

Докажем, что эта теорема верна и для всякого плоского криволинейного контура. Так как всякая фигура может быть разбита на кривые трапеции, то достаточно доказать эту теорему для последней фигуры. Обозначим через σ ее площадь, через σ' площадь ее проекции, через φ угол между их плоскостями. Вписываем в дугу AB (фиг. 136) ломаную $ACDEB$ и проектируем их на другую плоскость; тогда вписанный в кривую трапецию OAB многоугольник $OACDEB$ спроектируется в многоугольник $O'A'C'D'E'B'$, вписанный в трапецию $O'A'B'$; обозначим площади многоугольников соответственно через σ_n и σ_n', так что $\sigma_n'=\sigma_n\cos\varphi$; перейдем к пределу, полагая, что n — число вершин вписанной ломаной — неограниченно растет:

$$lim_{n\to\infty}\sigma_n'=lim_{n\to\infty}\sigma_n\cdot\cos\varphi \quad \text{или} \quad \sigma'=\sigma\cos\varphi,$$

так как

$$lim_{n\to\infty}\sigma_n'=\sigma' \quad \text{и} \quad lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma.$$

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ.

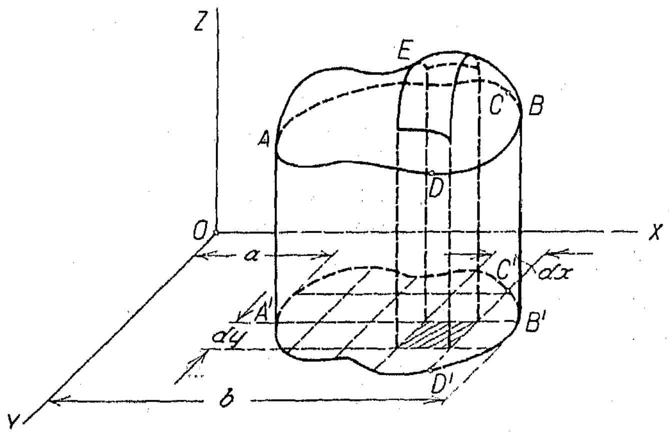
Интегралы различных порядков.

ГЛАВА I.

Двойные интегралы.

§ 1. Возникновение понятия двойного интеграла.

Возьмем кривой цилиндр $A'C'B'D'ACBDE$ (фиг. 137_I), ограниченный основанием $A'C'B'D'$, расположенным в плоскости XOY, основанием $ACBDE$, лежащим на поверхности $z=f(x, y)$, и цилиндрической поверх-



Фиг. 137_I.

ностью, состоящей из аппликат контура $ACBD$ верхнего основания; определим его объем. Для этого разобьем основание $A'C'B'D'$, площадь которого обозначим через σ, на n элементарных площадей [1])

$$\Delta\sigma_0,\ \Delta\sigma_1,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ \Delta\sigma_i,\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ \Delta\sigma_{n-1},$$

[1]) На фиг. 137_I для простоты элементарные площади, за исключением пограничных, изображены в виде прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям.

так что

$$\sigma = \Delta\sigma_0 + \Delta\sigma_1 + \ldots + \Delta\sigma_l + \ldots + \Delta\sigma_{n-1} = \underset{\sigma}{S}\Delta\sigma_l,$$

где символ $\underset{\sigma}{S}$ читается таким образом: сумма, распространенная на площадь σ.

Строим на элементарных площадях элементарные кривые цилиндры [1]) Пусть у каждого элементарного цилиндра наименьшая, наибольшая аппликаты и объем соответственно следующие:

$m_0, M_0, \Delta v_0;\ m_1, M_1, \Delta v_1; \ldots;\ m_l, M_l, \Delta v_l; \ldots;\ m_{n-1}, M_{n-1}, \Delta v_{n-1}$.

Проводим у каждого элементарного цилиндра на высоте наименьшей и наибольшей аппликат плоскости, параллельные плоскости XOY, и таким образом для каждого элементарного цилиндра получим вписанный и описанный цилиндры [2]), а для всего кривого цилиндра — вписанное и описанное ступенчатые тела; обозначим соответственно через V, v_n, V_n их объемы, так что $v = \underset{\sigma}{S}\Delta v_l$ $v_n = \underset{\sigma}{S} m_l\Delta\sigma_l$, $V_n = \underset{\sigma}{S} M_l\Delta\sigma_l$, причем $v_n < v < V_n$.

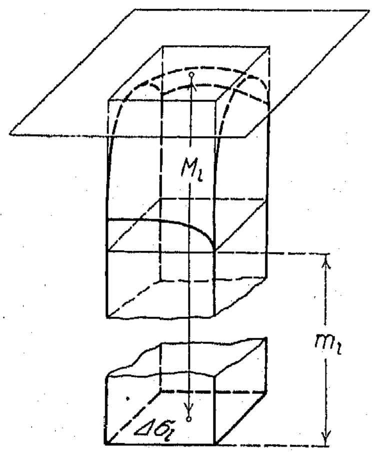
Докажем, что $v = lim_{n\to\infty} v_n = lim_{n\to\infty} V_n$, т.-е. что, если взять положительное число ε, то можно число n элементарных площадей сделать настолько большим, а каждую элементарную площадь $\Delta\sigma_l$ настолько малой, что $V_n - v_n < \varepsilon$, а следовательно, и подавно $v - v_n < \varepsilon$ и $V_n - v < \varepsilon$, т.-е. что эти разности бесконечно малые.

Так как

$$V_n - v_n = \underset{\sigma}{S} M_l\Delta\sigma_l - \underset{\sigma}{S} m_l\Delta\sigma_l = \underset{\sigma}{S}(M_l - m_l)\,\Delta\sigma_l,$$

то нужно доказать, что

$$\underset{\sigma}{S}(M_l - m_l)\,\Delta\sigma_l < \varepsilon;$$



Фиг. 137II.

для этого возьмем элементарные площади настолько малыми, чтобы

$$M_0 - m_0 < \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

$$M_1 - m_1 < \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$M_l - m_l < \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$M_{n-1} - m_{n-1} < \frac{\varepsilon}{\sigma};$$

---

[1]) На фиг. 137I и 137II представлен только один цилиндр номера l.

[2]) На фиг. 137I, 137II и частный случай цилиндра — параллелепипед.

отсюда

$$(M_0 - m_0)\,\Delta\sigma_0 + (M_1 - m_1)\,\Delta\sigma_1 + \; . \; . \; . \; . \; + (M_l - m_l)\,\Delta\sigma_l +$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; + (M_{n-1} - m_{n-1})\,\Delta\sigma_{n-1} < \frac{\varepsilon}{\sigma}(\Delta\sigma_0 + \Delta\sigma_1 +$$
$$+ \; . \; . \; . + \Delta\sigma_l + \; . \; . \; . + \Delta\sigma_{n-1})$$

или

$$\underset{\sigma}{S}\,(M_l - m_l)\,\Delta\sigma_l < \frac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sigma,$$

т.-е. $V_n - v_n < \varepsilon$ и, следовательно, подавно, $v - v_n < \varepsilon$, $V_n - v < \varepsilon$; отсюда, на основании определения предела,

$$v = lim_{n\to\infty}\, v_n = lim_{n\to\infty}\, V_n.$$

Выберем теперь на каждой элементарной площади произвольную точку

$$(\xi_0,\ \eta_0),\quad (\xi_1,\ \eta_1),\ .\ .\ .\ .\ ,\ (\xi_l,\ \eta_l),\ .\ .\ .\ .\ ,\ (\xi_{n-1},\ \eta_{n-1});$$

тогда аппликаты соответствующих точек поверхности, проекциями которых на плоскость XOY служат выбранные точки, будут

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= f(\xi_0,\ \eta_0),\\
\zeta_1 &= f(\xi_1,\ \eta_1),\\
&\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
\zeta_l &= f(\xi_l,\ \eta_l),\\
&\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
\zeta_{n-1} &= f(\xi_{n-1},\ \eta_{n-1}).
\end{aligned}$$

Так как m_l — наименьшая, $\zeta_l = f(\xi_l,\ \eta_l)$ — промежуточная, M_l — наибольшая аппликаты для элементарного цилиндра номера l, то

$$m_l \leqslant \zeta_l \leqslant M_l,$$

откуда

$$m_l\Delta\sigma_l \leqslant \zeta_l\Delta\sigma_l \leqslant M_l\Delta\sigma_l;$$

суммируем по площади нижнего основания цилиндра:

$$\underset{\sigma}{S}\, m_l\Delta\sigma_l \leqslant \underset{\sigma}{S}\, \zeta_l\Delta\sigma_l \leqslant \underset{\sigma}{S}\, M_l\Delta\sigma_l$$

или

$$v_n \leqslant \underset{\sigma}{S}\, \zeta_l\,\Delta\sigma_l \leqslant V_n.$$

Так как $v = lim_{n\to\infty}\, v_n = lim_{n\to\infty}\, V_n$, то (часть первая, § 8, теорема 5)

$$v = lim_{n\to\infty}\, \underset{\sigma}{S}\, \zeta_l\,\Delta\sigma_l.$$

Этот предел называется **двойным интегралом, распространенным на площадь** σ, и обозначается такими символами

$$v = \iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma = \int\limits_{\sigma} z\,d\sigma = lim_{n\to\infty} \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\sigma} \zeta_l\,\Delta\sigma_l \qquad (1)$$

или

$$v = \iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma = \int\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma = lim_{n\to\infty} \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\sigma} f(\xi_l,\ \eta_l)\Delta\sigma_l. \qquad (2)$$

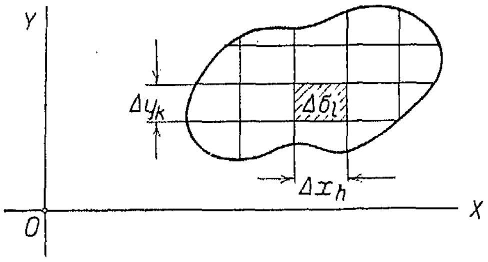
где $f(x,\ y)$ — непрерывная функция внутри площади σ.

Так как двойной интеграл геометрически представляет объем, то, если подынтегральная функция $f(x,\ y)$ непрерывна, двойной интеграл всегда существует.

Если $\sigma = 0$, то кривой цилиндр обращается в прямолинейный отрезок; в соответствии с этим условимся считать при $\sigma = 0$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,\ y)\,d\sigma = 0.$$

Разбивая площадь σ на элементарные площади при помощи прямых, параллельных координатным осям (фиг. 138), видим из чертежа, что $\Delta\sigma_l = \Delta x_h \cdot \Delta y_k$, где h и k — номера полосок, параллельных соответственно



Фиг. 138.

осям Y и X и образующих своим пересечением прямоугольник номера l; поэтому вместо $d\sigma$ можно писать $dx \cdot dy$, так что

$$v = \iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} z\,dx\,dy = lim_{n\to\infty} \mathop{\mathbf{S}}\limits_{\sigma} \zeta_l\,\Delta x_h\,\Delta y_k, \qquad (3)$$

где

$$z = f(x,\ y), \quad \zeta_l = f(\xi_l,\ \eta_l).$$

Основные теоремы, выведенные относительно определенного интеграла (часть третья, гл. II, § 6), применимы и здесь; доказательства аналогичны.

ПРИМЕР. Выразить объем v, ограниченный гиперболическим параболоидом $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ и плоскостями XOY и $x = r$, при помощи двойного интеграла.

На основании только что приведенных соображений (фиг. 134)

$$v=\frac{1}{2}\iint\limits_{OAB}\left(\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}\right)dx.$$

Сравнивая это выражение объема при помощи двойного интеграла с полученным раньше (часть пятая, гл. II, § 4, пример) выражением того же объема при помощи двукратного интеграла, видим преимущества последнего в отношении вычислений; с другой стороны, многие вопросы прикладного характера, в особенности механики, приводятся к двойному интегралу, и, таким образом, благодаря связи его с двукратным, получается возможность довести вычисления до конца.

§ 2. Связь двойного интеграла с двукратным в случае декартовых координат.

Как только что было отмечено, нами получено два выражения объема кривого цилиндра — одно при помощи двойного интеграла (§ 1) и другое при помощи двукратного (часть пятая, гл. II, § 4), так что связь между обоими интегралами такая

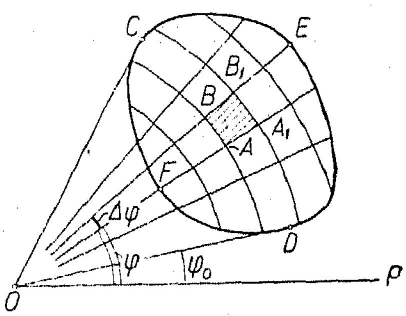
$$v=\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma} z\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z\,dx, \tag{4}$$

где

$$z=f(x,\ y).$$

§ 3. Связь двойного интеграла с двукратным в случае полярных координат.

Пусть σ — площадь интеграции — будет $CEDF$ (фиг. 139); разбиваем ее на n элементарных площадей помощью концентрических окружностей с центром в полюсе и радиусов-векторов; пусть элементарная площадь $\Delta\sigma_l$ номера l будет ABB_1A_1 с вершинами в точках $A(\varphi_h,\ \varrho_k)$, $B(\varphi_h+\Delta\varphi_h,\ \varrho_k)$, $B_1(\varphi_h+\Delta\varphi_h,\ \varrho_k+\Delta\varrho_k)$, $A_1(\varphi_h,\ \varrho_k+\Delta\varrho_k)$; так как элементарная площадь ABB_1A_1 представляет разность секторов OA_1B_1 и OAB, то



Фиг. 139.

$$\Delta\sigma_l=\frac{1}{2}\,OA_1{}^2\cdot\smile{A_1B_1}-\frac{1}{2}\,OA^2\cdot\smile{AB}=$$

$$=\frac{1}{2}(\varrho_k+\Delta\varrho_k)^2\Delta\varphi_h-\frac{1}{2}\varrho_k{}^2\Delta\varphi_h=$$

$$=\frac{1}{2}(2\varrho_k+\Delta\varrho_k)\Delta\varrho_k\Delta\varphi_h=\varrho_k\Delta\varphi_h\Delta\varrho_k+\frac{1}{2}\Delta\varphi_h(\Delta\varrho_k)^2;$$

следовательно, главная часть бесконечно малой $\Delta\sigma_l$ равна[1]) $\varrho_k\Delta\varphi_h\Delta\varrho_k$.

---

[1]) Так как $AB=\varrho_k\Delta\varphi_h$ и $AA_1=\Delta\varrho_k$ (фиг. 139), то главная часть бесконечно малой $\Delta\sigma_l$, т.-е. $\varrho_k\Delta\varphi_h\Delta\varrho_k=AB\cdot AA_1$, получается применением формулы площади прямолинейного прямоугольника к элементарному четыреугольнику ABB_1A_1.

Построим теперь на площади $CEDF$ кривой цилиндр, другое основание которого лежит на поверхности $z = F(\varphi, \varrho)$, где z — аппликата, φ — амплитуда, ϱ — радиус-вектор [1]). Тогда, как мы видели [§ 1, формула (1)], объем кривого цилиндра $v = lim_{n\to\infty} \underset{\sigma}{S} \zeta_l \Delta\sigma_l$; так как главная часть бесконечно малого произведения $\zeta_l \Delta\sigma_l$ равна $\zeta_l \varrho_k \Delta\varphi_h \Delta\varrho_k$, то (часть третья, гл. III, § 2, следствие)

$$v = lim_{n\to\infty} \underset{\sigma}{S} \zeta_l \varrho_k \Delta\varphi_h \Delta\varrho_k;$$

так как [2]) [гл. I, § 1, формула (3)] $lim_{n\to\infty} \underset{\sigma}{S} \zeta_l \varrho_k \Delta\varphi_h \Delta\varrho_k = \iint z\varrho\, d\varphi\, d\varrho$, то

$$v = \iint_{\sigma} z\varrho\, d\varphi\, d\varrho.$$

Переходим от двойного интеграла к двукратному

$$v = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} z\varrho\, d\varrho, \tag{5}$$

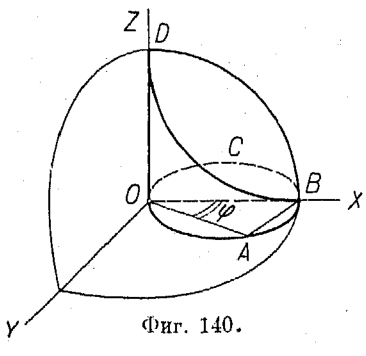
где $z = F(\varphi, \varrho)$, φ_0 и φ_1 — амплитуды крайних точек D и C контура, через которые проходят касательные из полюса, а $\varrho = \varrho_1(\varphi)$ и $\varrho = \varrho_2(\varphi)$ — уравнения дуг CFD и DEC контура.

Формула (5) получает особенно простой вид, когда полюс находится внутри площади интеграции $CFDE$,

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varrho(\varphi)} z\varrho\, d\varrho, \tag{6}$$

где $\varrho = \varrho(\varphi)$ — уравнение контура.

ПРИМЕР. Вычислить объем кривого цилиндра, ограниченного плоскостями XOY и XOZ, цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = rx$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (фиг. 140).



Фиг. 140.

Выразим искомый объем через двойной интеграл

$$v = \iint_{\sigma} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma,$$

где σ — полукруг OAB; перейдем теперь к двукратному интегралу, пользуясь полярными координатами [формула (5)] и сперва инте-

---

[1]) Координаты z, ϱ, φ называются цилиндрическими; на стр. 174 Аналит. Геом. они обозначены буквами z, r, ψ.

[2]) φ_h, ϱ_k, $\zeta_l \varrho_k$ соответствуют x_h, y_k, ζ_l формулы (3).

грируя по хорде $OA = r\cos\varphi$ [1]), а затем суммируя все хорды, т.-е. интегрируя от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r\cos(\varphi)} \sqrt{r^2 - \varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big|_0^{r\cos(\varphi)} (r^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(r^2 - r^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - r^3]\, d\varphi = \frac{1}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sin^3\varphi]\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{3} r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi)\, d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi + \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi] = \frac{1}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Отсюда объем остальной части шара, расположенной внутри нормального координатного угла, равен

$$\frac{1}{6}\pi r^3 - \frac{1}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} r^3.$$

Определим объем части шара, остающейся, после того как из него вынуты два цилиндра, из которых один построен на круге $OABC$, а другой — на таком же круге, симметричном с первым относительно оси Y; для этого умножаем последний результат на 8; таким образом, объем оставшейся части шара равен $\frac{16}{9} r^3$.

---

[1]) Это равенство получается из прямоугольного треугольника OAB; к нему же придем, если представим в полярных координатах уравнение $x^2 + y^2 = rx$ круга $OABC$: $\varrho^2 = r\varrho\cos\varphi$ или $\varrho = r\cos\varphi$. Точно так же подъинтегральная функция $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ представится в полярных координатах в таком виде: $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$.

ГЛАВА II.

Определенный интеграл, как функция параметра.

Возьмем определенный интеграл

$$\sigma(t) = \int_a^b f(x, t)\,dx, \tag{1}$$

где параметр t — переменная величина, не зависящая от x. Ясно, что интеграл (1) есть функция параметра t; это очевидно и геометрически: изменяя параметр t, мы изменяем кривую $y = f(x, t)$, а следовательно, и площадь $\sigma(t)$, ограниченную кривой, осью X и прямыми $x = a$, $x = b$, т.-е. изменяем определенный интеграл (1).

§ 1. Интегрирование интеграла по параметру.

Опираясь на свойство двукратного интеграла, у которого все четыре предела постоянны [смотреть формулу (3) на стр. 210 и заменить в ней букву y буквой t], получаем

$$\int_c^d dt \int_a^b f(x, t)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, t)\,dt, \tag{1}$$

т.-е., чтобы проинтегрировать определенный интеграл по параметру, нужно проинтегрировать по параметру подъинтегральную функцию.

ПРИМЕР.

$$\int_0^1 dt \int_a^b t^x\,dx = \int_a^b dx \int_0^1 t^x\,dt.$$

Так как

$$\int_0^1 t^x\,dt = \Big|_0^1 \frac{t^{x+1}}{x+1} = \frac{1}{x+1}, \quad \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln\frac{b+1}{a+1},$$

то

$$\int_0^1 dt \int_a^b t^x\,dx = \ln\frac{b+1}{a+1};$$

если принять во внимание, что

$$\int_a^b t^x\,dx = \Big|_a^b \frac{t^x}{\ln t} = \frac{t^b - t^a}{\ln t},$$

то получаем

$$\int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\ln t}\,dt = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Эта формула представляет самостоятельный интерес, так как неопределенный интеграл $\int \frac{t^b - t^a}{\ln t}\,dt$ — функция неэлементарная.

§ 2. Дифференцирование интеграла по параметру.

Для дифференцирования по параметру существует теорема, аналогичная только что доказанной относительно интегрирования по параметру: *чтобы продифференцировать определенный интеграл по параметру нужно продифференцировать по параметру подъинтегральную функцию*, т.-е.

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)\,dx = \int_a^b f_t'(x,\ t)\,dx. \tag{2}$$

Для доказательства интегрируем по t в пределах от c до d левую часть этого равенства, пользуясь тем, что интегрирование — операция, обратная дифференцированию,

$$\int_c^d\left[\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)dx\right]dt = \Big|_c^d\int_a^b f(x,\ t)\,dx = \int_a^b f(x,\ d)\,dx - \int_a^b f(x,\ c)\,dx;$$

интегрируем теперь по t в тех же пределах правую часть равенства (2), пользуясь формулой (1):

$$\int_c^d dt\int_a^b f_t'(x,\ t)\,dx = \int_a^b dx\int_c^d f_t'(x,\ t)\,dt = \int_a^b [f(x,\ d) - f(x,\ c)]\,dx;$$

так как результаты интегрирования левой и правой частей формулы (2) равны:

$$\int_a^b f(x,\ d)\,dx - \int_a^b f(x,\ c)\,dx = \int_a^b [f(x,\ d) - f(x,\ c)]\,dx,$$

то она верна.

К той же формуле (2) можно прийти и непосредственно, если использовать обычный прием нахождения производной. В самом деле, находим приращение функции $\sigma(t)$:

$$\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t) = \int_a^b f(x,\ t+\Delta t)\,dx - \int_a^b f(x,\ t)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f(x,\ t+\Delta t) - f(x,\ t)]\,dx;$$

делим обе части равенства на приращение Δt:

$$\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}=\int_a^b \frac{f(x,\ t+\Delta t)-f(x,\ t)}{\Delta t}\,dx;$$

переходим к пределу, полагая $\Delta t\to 0$:

$$lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}=\int_a^b lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x,\ t+\Delta t)-f(x,\ t)}{\Delta t}\,dx.$$

или

$$\frac{d\,\sigma(t)}{dt}=\int_a^b f_t'(x,\ t)\,dx. \qquad (2)$$

Таким образом, формула (2) доказана, но приведенное доказательство имеет тот недостаток, что допускает перестановку порядка интегрирования и перехода к пределу.

ПРИМЕР.

$$\frac{d}{dt}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=-\frac{1}{2}\int_0^x (x^2+t)^{-\frac{3}{2}}\,dx,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\int_0^x (x^2+t)^{-\frac{5}{2}}\,dx,$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\int_0^x (x^2+t)^{-\frac{7}{2}}\,dx$$

и вообще

$$\frac{d^n}{dt^n}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\int_0^x (x^2+t)^{-n-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Так как

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}}=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+t}}{\sqrt{t}},$$

то

$$\int_0^x (x^2+t)^{-n-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\,\frac{d^n}{dt^n}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+t}}{\sqrt{t}};$$

следовательно, отыскание интеграла сведено к нахождению производной.

Примечание. Если пределы a и b интеграла (1) зависят от параметра t, то, пользуясь формулой (часть четвертая, § 3) полной производной сложной функции одного независимого переменного и формулами производных определенного интеграла по верхнему и нижнему пределам (часть третья, гл. II, § 2 и § 6), получаем:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,\ t)\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(x,\ t)\,dx+\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\ t)\,dx\cdot\frac{db}{dt}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\ t)\,dx\cdot\frac{da}{dt}=\int_a^b f_t'(x,\ t)\,dx+f(b,\ t)\frac{db}{dt}-f(a,\ t)\frac{da}{dt}.$$

ГЛАВА III.

Геометрические приложения двойных интегралов.

§ 1. Вычисление объемов (кубатура).

Как мы видели (гл. I, § 1), геометрическое значение двойного интеграла заключается в том, что он выражает величину v объема кривого цилиндра

$$v=\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma, \tag{1}$$

у которого основание σ лежит на плоскости XOY, а другое основание — на поверхности $z=f(x, y)$; так как всякий объем можно представить алгебраической суммой объемов кривых цилиндров (фиг. 133), то всякий объем может быть представлен при помощи двойных интегралов. Так как непосредственное суммирование по формуле (1) крайне затруднительно, то практически для вычисления объемов пользуются двукратным интегралом (гл. I, §§ 2 и 3; часть пятая, гл. II, § 4)

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z\,dx=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} z\,\rho\,d\rho, \tag{2}$$

где в случае декартовых координат $z=f(x, y)$, а в случае полярных $z=f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)=F(\varphi, \rho)$.

Кроме того (часть пятая, гл. II, § 3), если известен закон изменения площади $\sigma(x)$ сечения, перпендикулярного к оси X, то объем можно найти при помощи простого интеграла

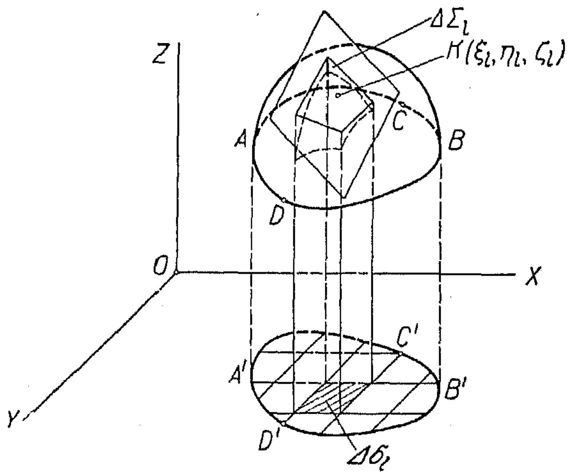
$$v=\int_a^b \sigma(x)\,dx. \tag{3}$$

Наконец (часть пятая, гл. II, § 5), в случае тела вращения около оси X

$$v=\pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{4}$$

§ 2. Вычисление поверхностей (компланация).

Пусть дана поверхность $z=f(x, y)$; требуется вычислить площадь Σ части ее $ACBDK$ (фиг. 141); спроектируем последнюю на плоскость XOY и затем[1]) разобьем площадь σ проекции $A'C'B'D'$ на n элементарных площадей



Фиг. 141.

$$\Delta\sigma_0, \Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_l, \ldots, \Delta\sigma_{n-1};$$

строим на них элементарные кривые цилиндры. Возьмем какой-нибудь из них, например, номера l, и в произвольной точке $K(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)$ верхнего основания, проводим касательную плоскость; пусть этот элементарный цилиндр отсекает на ней площадь $\Delta\Sigma_l$. Поступая точно таким же способом и с остальными элементарными цилиндрами, получаем на касательных плоскостях n площадей

$$\Delta\Sigma_0, \Delta\Sigma_1, \ldots, \Delta\Sigma_l, \ldots, \Delta\Sigma_{n-1};$$

все вместе они представят описанную прерывную многогранную поверхность; обозначим ее площадь через Σ_n, так что

$$\Sigma_n = \Delta\Sigma_0 + \Delta\Sigma_1 + \ldots + \Delta\Sigma_l + \ldots + \Delta\Sigma_{n-1} = \mathop{\mathrm{S}}_{l=0}^{l=n-1} \Delta\Sigma_l.$$

Назовем площадью кривой поверхности предел площади этой описанной прерывной многогранной поверхности, когда число ее граней неограниченно растет, а каждая грань стремится стянуться в точку поверхности, т.-е.

$$\Sigma = lim_{n\to\infty} \Sigma_n = lim_{n\to\infty} \mathop{\mathrm{S}}_{l=0}^{l=n-1} \Delta\Sigma_l.$$

Так как элементарная площадь $\Delta\sigma_l$ есть проекция площади $\Delta\Sigma_l$, то (часть пятая, гл. II, § 6) $\Delta\sigma_l = \Delta\Sigma_l \cos\varphi_l$, где φ_l — угол между касательной плоскостью в точке K и плоскостью XOY или, что[2]) то же, между нормалью к поверхности в точке K и осью Z; следовательно (часть пятая, гл. II, § 1),

$$\cos\varphi_l = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_l, \eta_l) + f_y'^2(\xi_l, \eta)}}.$$

---

[1]) На фиг. 141 площадь проекции разбита прямыми, параллельными координатным осям, на элементарные прямоугольники.

[2]) Сравнить: Анал. Геом., стр. 184—185.

Полагая для упрощения письма

$$\sqrt{1+f_x'^2(x, y)+f_y'^2(x, y)}=\Phi(x, y),$$

получаем

$$\Delta\Sigma_l=\Phi(\xi_l, \eta_l)\,\Delta\sigma_l$$

и

$$\Sigma=lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{l=n-1}\Phi(\xi_l, \eta_l)\,\Delta\sigma_l$$

или

$$\Sigma=lim_{n\to\infty}\sum_{\sigma}\Phi(\xi_l, \eta_l)\,\Delta\sigma_l.$$

Но [гл. I, § 1, формула (2)]

$$lim_{n\to\infty}\sum_{\sigma}\Phi(\xi_l, \eta_l)\,\Delta\sigma_l=\iint_{\sigma}\Phi(x, y)\,d\sigma;$$

следовательно,

$$\Sigma=\iint_{\sigma}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma, \qquad (5)$$

так как

$$\Phi(x, y)=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y) \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y).$$

Отсюда видим, что достаточное условие существования площади Σ требует, чтобы были непрерывными не только функция $z=f(x, y)$, но также и ее частные производные p и q.

ПРИМЕР. Вычислить площадь Σ части поверхности шара, которая получается, если из него вынуть два цилиндра, как это было сделано в примере главы I (§ 3).

Найдем подъинтегральную функцию $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в формуле (5), где в данном примере p и q частные производные аппликаты z в уравнении сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$; так как $2x+2zp=0$ и $2y+2zq=0$, то

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{r}{z}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\varrho^2}},$$

где $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ — радиус-вектор. Вычислим сперва площадь Σ_1 верхнего основания BD цилиндра $OABD$ (фиг. 140), пользуясь формулой (2) для случая полярных координат:

$$\Sigma_1=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{r\cos\varphi}\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}=-r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big|_0^{r\cos\varphi}\sqrt{r^2-\varrho^2}\,d\varphi=$$

$$= -r\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{r^2-r^2\cos^2\varphi}-r]\,d\varphi = -r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi-1)\,d\varphi =$$

$$= -r^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\varphi-\varphi) = r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Отсюда площадь оставшейся части сферы в нормальном угле равна

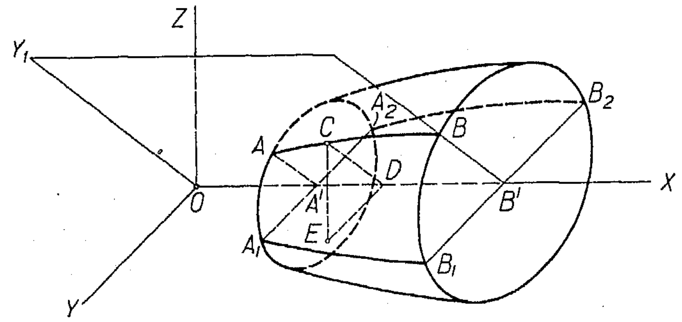
$$\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = r^2;$$

следовательно,

$$\Sigma = 8r^2.$$

3. Площадь поверхности тела вращения.

Для того, чтобы получить уравнение поверхности (фиг. 142), образованной вращением кривой $y=f(x)$ около оси X, проведем через эту ось и какую-нибудь точку $C(x, y, z)$ поверхности плоскость XOY_1;



Фиг. 142.

пусть она пересечет поверхность по кривой AB, а плоскость YOZ по прямой OY_1. Примем OY_1 за ось ординат в плоскости сечения; тогда уравнение кривой AB, если рассматривать ее в этой плоскости, будет $y_1=f(x)$. Построим координаты x, y, z и y_1 точки C, т.-е. отрезки OD, DE, EC и DC; так как $EC^2=DC^2-DE^2$, или $z^2=y_1{}^2-y^2$, то уравнение поверхности вращения

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

Отсюда

$$p=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}, \quad q=-\frac{y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},$$

$$1+q^2+p^2=1+\frac{f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)-y^2}+\frac{y^2}{f^2(x)-y^2}=\frac{f^2(x)[1+f'^2(x)]}{f^2(x)-y^2}.$$

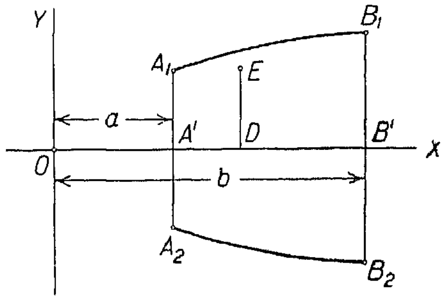
Рассмотрим сечение $A_1B_1B_2A_2$ (фиг. 143) поверхности вращения плоскостью XOY; так как эта поверхность расположена симметрично около оси вращения OX, то достаточно взять за площадь интеграции кривую трапецию $A'A_1B_1B'$ и таким образом вычислить четверть искомой поверхности Σ:

$$\frac{1}{4}\Sigma=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\int_0^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}=$$

$$=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\left|_0^{f(x)}\arcsin\frac{y}{f(x)}\,dx=\right.$$

$$=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\cdot\arcsin 1\cdot dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$



Фиг. 143.

Следовательно, площадь поверхности вращения

$$\Sigma=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{6}$$

где $y=f(x)$. Так как (часть третья, гл. III, § 4) дифференциал дуги $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, то

$$\Sigma=2\pi\int_{s_0}^{s_1} y\,ds, \tag{7}$$

где s_0 и s_1 — расстояния концов дуги AB, т.-е. точек A и B, от начала O_1 счета дуг (фиг. 96), если эти расстояния отсчитывать по кривой.

ПРИМЕР. Вычислить поверхность, получаемую от вращения полуволны синусоиды.

Так как $y=\sin x$ и $y'=\cos x$, то

$$\Sigma=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=$$

$$=-4\pi\int_1^0\sqrt{1+t^2}\,dt,$$

где $t=\cos x$; отсюда (часть третья, гл. I, § 6, V, пример 3)

$$\Sigma=-4\pi\left|_1^0\left(\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\right)\right.=2\pi\left[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right].$$

ГЛАВА IV.

Тройные интегралы.

§ 1. Возникновение понятия тройного интеграла.

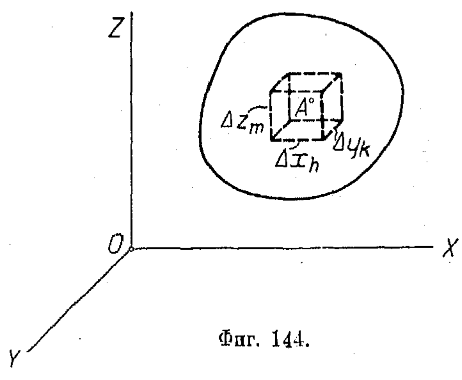
Возьмем тело с данным объемом v и переменной плотностью $u = f(x, y, z)$; вычислим его массу w. Для этого разобьем объем v на n элементарных объемов

$$\Delta v_0, \Delta v_1, \ldots, \Delta v_l, \ldots, \Delta v_{n-1},$$

так что

$$v = \Delta v_0 + \Delta v_1 + \ldots + \Delta v_l + \ldots + \Delta v_{n-1} = \mathop{\mathbf{S}}_{v} \Delta v_l,$$

где символ $\mathop{\mathbf{S}}_{v}$ читается таким образом: сумма, распространенная на объем v. Возьмем элементарный объем номера l (фиг. 144) и в нем три точки — одну с наименьшей плотностью m_l, другую с наибольшей M_l и третью $A(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)$ произвольную, в которой плотность равна $f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)$, так что



Фиг. 144.

$$m_l \leqslant f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \leqslant M_l$$

и

$$m_l \Delta v_l \leqslant f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \Delta v_l \leqslant M_l \Delta v_l.$$

Сделаем то же самое для всех элементарных объемов и затем просуммируем по объему v получившиеся произведения:

$$\mathop{\mathbf{S}}_{v} m_l \Delta v_l \leqslant \mathop{\mathbf{S}}_{v} f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \Delta v_l \leqslant \mathop{\mathbf{S}}_{v} M_l \Delta v_l.$$

Тем же способом, как в случае простого (часть третья, гл. II, § 1) и двойного (часть шестая, гл. I, § 1) интегралов, можно доказать, что, если функция $f(x, y, z)$ внутри объема v непрерывна, то масса

$$w = lim_{n \to \infty} \mathop{\mathbf{S}}_{v} f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \Delta v_l.$$

Этот предел называется тройным интегралом, распространенным на объем v, и обозначается такими символами:

$$w=\iiint\limits_v f(x, y, z)\,dv=\int\limits_v f(x, y, z)\,dv=lim_{n\to\infty}\mathop{\mathbf{S}}\limits_v f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)\,\Delta v_l. \qquad (1)$$

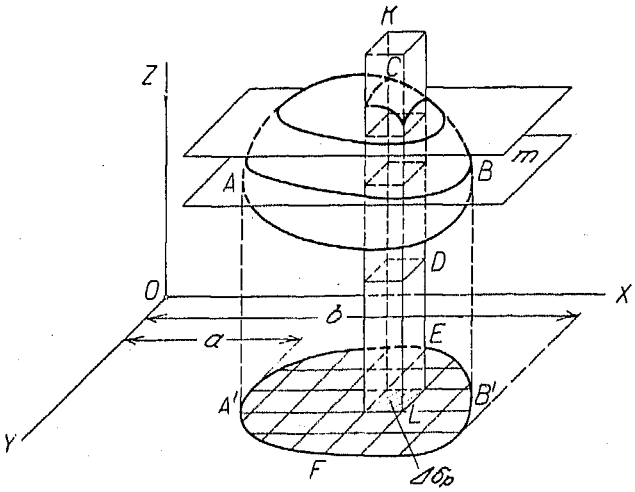
Разбивая объем v на элементарные объемы при помощи плоскостей, параллельных координатным плоскостям (фиг. 144), видим из чертежа, что $\Delta v_l=\Delta x_h\Delta y_k\Delta z_m$, где h, k, m — номера слоев, параллельных соответственно координатным плоскостям YOZ, ZOX, XOY и образующих своим пересечением параллелепипед номера l; поэтому, вместо dv, можно писать $dx\,dy\,dz$, так что

$$w=\iiint\limits_v f(x, y, z)\,dv=\iiint\limits_v f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

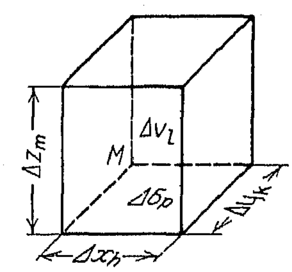
$$=lim_{n\to\infty}\mathop{\mathbf{S}}\limits_v f(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)\,\Delta x_h\Delta y_k\Delta z_m. \qquad (2)$$

§ 2. Связь тройного интеграла с трекратным в случае декартовых координат.

Разобьем тело плоскостями, параллельными координатным плоскостям XOZ и YOZ на столбцы *) (фиг. 145_I), а самые столбцы при помощи плоскостей, параллельных плоскости XOY—на элементарные объемы—



Фиг. 145_I.



Фиг. 145_{II} **).

параллелепипеды. Возьмем элементарный параллелепипед номера l (фиг. 145_{II}), расположенный в столбце номера p и горизонтальной полосе номера m; объем его Δv_l равен произведению площади основания $\Delta\sigma_p=$ $=\Delta x_p\cdot\Delta y_p$ на высоту Δz_m:

$$\Delta v_l=\Delta\sigma_p\,\Delta z_m.$$

*) На фиг. 145_I представлен только один столбец CD на номера p и параллелепипед KL, проектирующий его на плоскость XOY.

**) На фиг. 145_{II} $\Delta x_p=\Delta x_h$ и $\Delta y_p=\Delta y_k$.

Масса элементарного объема номера l, если принять плотность во всех точках его постоянной, приближенно равна

$$f(x_p,\ y_p,\ z_m)\Delta\sigma_p\Delta z_m\,,$$

где точка $M(x_p,\ y_p,\ z_m)$ — ближайшая к началу координат вершина элементарного параллелепипеда номера l. Составим сумму таких произведений для всех q параллелепипедов, помещающихся в столбце номера p:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{m=0}^{m=q-1} f(x_p,\ y_p,\ z_m)\,\Delta\sigma_p\,\Delta z_m = \Delta\sigma_p \cdot \mathop{\mathrm{S}}_{m=0}^{m=q-1} f(x_p,\ y_p,\ z_m)\,\Delta z_m,$$

причем отбрасываем пограничные элементарные объемы, представляющие части параллелепипедов, отсеченные поверхностью тела; мы не станем доказывать, что это отбрасывание пограничных объемов на результат, получающийся процессом перехода к пределу, не влияет, так как предел суммы произведений $f(x_l,\ y_l,\ z_l)\,\Delta v_l$, распространенной на пограничную полосу, составленную из этих объемов, равен нулю; точно так же мы не станем доказывать, что допущение постоянства плотности в каждом элементарном объеме не влияет на окончательный результат, получающийся в пределе.

Положим, что всякая прямая, параллельная оси Z, пересекает поверхность тела в двух точках, и построим цилиндр $ABA'FB'E$, проектирующий тело $ADBC$ на плоскость XOY в виде площади σ с контуром $A'FB'E$. Пусть уравнения частей ADB и ACB контура тела, на которые он разделяется кривой касания проектирующего цилиндра, будут соответственно $z = z_1(x,\ y)$ и $z = z_2(x,\ y)$. Тогда (часть третья, гл. II, § 1)

$$lim_{q\to\infty} \mathop{\mathrm{S}}_{m=0}^{m=q-1} f(x_p,\ y_p,\ z_m)\,\Delta z_m = lim_{q\to\infty} \mathop{\mathrm{S}}_{z_1(x_p,\ y_p)}^{z_2(x_p,\ y_p)} f(x_p,\ y_p,\ z_m)\,\Delta z_m =$$
$$= \int_{z_1(x_p,\ y_p)}^{z_2(x_p,\ y_p)} f(x_p,\ y_p,\ z)\,dz.$$

Положим для упрощения письма

$$\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz = \Phi(x,\ y);$$

тогда объем столбца номера l представится таким образом:

$$\Delta\sigma_p \cdot \Phi(x_p,\ y_p) = \Phi(x_p,\ y_p)\,\Delta\sigma_p.$$

Проделаем эти преобразования для всех столбцов, расположенных внутри тела и проектирующихся на площадь σ, ограниченную контуром

$A'FB'E$, и затем просуммируем все получившиеся произведения, т.-е. возьмем сумму, распространенную на площадь σ,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\sigma} \Phi(x_p, y_p)\, \Delta\sigma_p\,.$$

Полагая, что число r столбцов неограниченно растет, переходим к пределу:

$$w = lim_{r\to\infty} \mathop{\mathrm{S}}_{\sigma} \Phi(x_p, y_p)\, \Delta\sigma_p\,,$$

но этот предел представляет собою двойной интеграл, распространенный на площадь σ [гл. I, § 1, формула (2)],

$$w = \iint_{\sigma} \Phi(x, y)\, d\sigma\,.$$

Пусть уравнения кривых $A'EB'$ и $A'FB'$, на которые разбивается контур $A'FB'E$ площади σ касательными $x = a$ и $x = b$, параллельными оси Y, будут соответственно $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$; тогда двойной интеграл можно заменить [гл. I, § 2, формула (4)] двукратным

$$w = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Phi(x, y)\, dy\,.$$

Заменяя функцию $\Phi(x, y)$ ее значением, получаем окончательное выражение массы тела w через тройной и трехкратный интегралы.

$$w = \iiint_v f(x, y, z)\, dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{3}$$

ПРИМЕР. Найти массу w однородного тела плотности c, контуром которого служат плоскости $z = 0$, $x = r$ и гиперболический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\,.$$

Так как в формуле (3)

$$f(x, y, z) = c, \quad a = 0, \quad b = r, \quad y_1(x) = -\sqrt{\frac{q}{p}}\,x, \quad y_2(x) = \sqrt{\frac{q}{p}}\,x,$$

$$z_1(x, y) = 0, \quad z_2(x, y) = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\,,$$

то искомая масса

$$w = c\int_0^r dx \int_{-\sqrt{\frac{q}{p}}\,x}^{+\sqrt{\frac{q}{p}}\,x} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}} dz;$$

так как

$$\int_0^{\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}} dz = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},$$

то

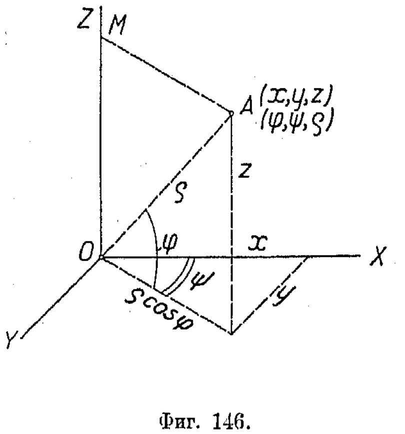
$$w = \frac{1}{2} c \int_0^r dx \int_{-\sqrt{\frac{p}{q}}x}^{+\sqrt{\frac{p}{q}}x} \left(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\right) dy;$$

отсюда (часть пятая, гл. II, § 4, пример) $w = cv$, где v — объем тела; этот результат следует непосредственно из определения плотности однородного тела.

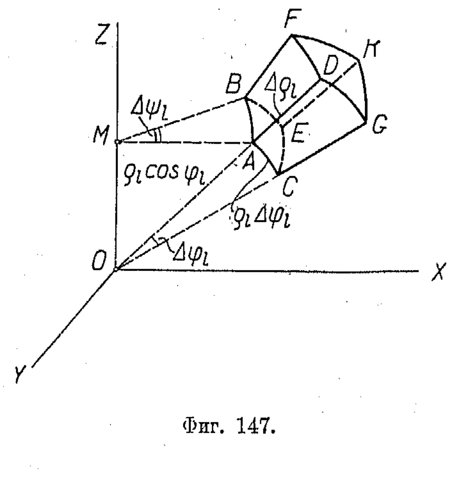
§ 3. Связь тройного интеграла с трекратным в случае полярных координат.

Как известно (Аналит. Геом., стр. 174), положение точки в пространстве можно определить при помощи полярных координат: радиуса-вектора ϱ, широты φ, долготы ψ (фиг. 146).

Чтобы получить формулу для вычисления массы тела в полярных координатах, разобьем его на элементарные объемы 1) концентрическими сферами с центром в полюсе O, 2) круглыми конусами с общей осью — осью Z — и с общей вершиной в том же полюсе и 3) плоскостями, проходящими через ось Z[1]. Возьмем элементарный объем $ABECDFKG$



Фиг. 146.



Фиг. 147.

(фиг. 147) номера l. Пусть ϱ_l, φ_l, ψ_l — координаты точки A; тогда $AD = \Delta\varrho_l$; дуга AB круга показывает изменение долготы ψ и лежит на параллели, служащей вместе с тем основанием круглого конуса; следовательно, $\breve{AB} = MA \cdot \Delta\psi_l = \varrho_l \cos\varphi_l \Delta\psi_l$; наконец, дуга AC круга лежит на

[1]) Каждая сфера, конус и плоскость представятся соответственно уравнениями $\varrho = c_1$, $\varphi = c_2$, $\psi = c_3$, где c_1, c_2, c_3 — постоянные.

меридиане и показывает изменение широты φ; следовательно, $\breve{AC} = OA \cdot \Delta\varphi_l = \varrho_l \Delta\varphi_l$. Повторяя рассуждения, проведенные в случае полярных координат на плоскости (гл. I, § 3), мы придем к результату, совершенно аналогичному (сноска на стр. 219), что главная часть бесконечно малой Δv_l получается применением формулы объема прямоугольного параллелепипеда к элементарному телу $ABECDFKG$, т.-е. главная часть Δv_l равна $AD \cdot AB \cdot AC = \Delta\varrho_l \cdot \varrho_l \cos\varphi_l \Delta\psi_l \cdot \varrho_l \Delta\varphi_l = \varrho_l^2 \cos\varphi_l \Delta\varphi_l \Delta\psi_l \Delta\varrho_l$. Таким образом (часть третья, гл. III, § 2, следствие),

$$w = lim_{n\to\infty} \mathop{\mathbf{S}}_{v} F(\varphi_l, \psi_l, \varrho_l)\, \varrho_l^2 \cos\varphi_l \,\Delta\varphi_l \,\Delta\psi_l \,\Delta\varrho_l,$$

где $u = F(\varphi, \psi, \varrho)$ — плотность в точке (φ, ψ, ϱ); так как [§ 1, формула (2)]

$$lim_{n\to\infty} \mathop{\mathbf{S}}_{v} F(\varphi_l, \psi_l, \varrho_l)\, \varrho_l^2 \cos\varphi_l \,\Delta\varphi_l \,\Delta\psi_l \,\Delta\varrho_l = \iiint_v F(\varphi, \psi, \varrho)\, \varrho^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi \, d\varrho,$$

то

$$w = \iiint_v F(\varphi, \psi, \varrho)\, \varrho^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\varrho \, d\psi.$$

Если полюс помещен внутри тела, уравнение контура которого $\varrho = \varrho(\varphi, \psi)$, то тройной интеграл можно заменить таким трекратным:

$$w = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\varrho(\varphi,\psi)} F(\varphi, \psi, \varrho)\, \varrho^2 \, d\varrho,$$

где долгота ψ изменяется от 0 до 2π, широта от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а радиус-вектор ϱ от нуля до радиуса-вектора $\varrho(\varphi, \psi)$ соответствующей точки поверхности $\varrho = \varrho(\varphi, \psi)$.

ГЛАВА V.

Механические приложения интегрального исчисления.

§ 1. Центр тяжести.

Как указывается в курсах теоретической механики, координаты центра тяжести тела, закон изменения плотности которого выражается уравнением $u = f(x, y, z)$, получаются по формулам

$$\overline{x} = \frac{lim \mathbf{S}\, x_i f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i}{lim \mathbf{S}\, f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i}, \quad \overline{y} = \frac{lim \mathbf{S}\, y_i f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i}{lim \mathbf{S}\, f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i},$$

$$\overline{z} = \frac{lim \mathbf{S}\, z_i f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i}{lim \mathbf{S}\, f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta v_i}$$

или [гл. IV, § 1, формула (1)]

$$\overline{x} = \frac{\iiint x f(x, y, z)\, dv}{\iiint f(x, y, z)\, dv}, \quad \overline{y} = \frac{\iiint y f(x, y, z)\, dv}{\iiint f(x, y, z)\, dv},$$

$$\overline{z} = \frac{\iiint z f(x, y, z)\, dv}{\iiint f(x, y, z)\, dv},$$

где все суммы и интегралы распространены на объем тела, числители представляют статические моменты относительно координатных плоскостей соответственно YOZ, ZOX, XOY, а знаменатели — массу тела.

Если тело однородно, то плотность u постоянная; вынося за знаки интегралов постоянный множитель u и сокращая на него, получаем формулы центра тяжести объема

$$\overline{x} = \frac{1}{v}\iiint\limits_v x\,dv, \quad \overline{y} = \frac{1}{v}\iiint\limits_v y\,dv, \quad \overline{z} = \frac{1}{v}\iiint\limits_v z\,dv \tag{1}$$

ввиду того, что $\iiint\limits_a dv = v$.

Так как у поверхности $z=f(x,y)$ элемент ее $\Delta\Sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma$ (гл. III, § 2), где p и q — частные производные аппликаты по абсциссе и ординате, а $\Delta\sigma$ — проекция его на плоскость XOY, то координаты центра тяжести поверхности можно вычислить по только что полученным формулам, заменяя объем v через площадь Σ поверхности, а элемент объема Δv через элемент площади $\Delta\Sigma$:

$$\overline{x}=\frac{1}{\Sigma}\iint\limits_{\sigma} x\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma,\qquad \overline{y}=\frac{1}{\Sigma}\iint\limits_{\sigma} y\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{\Sigma}\iint\limits_{\sigma} z\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma.$$

Если фигура плоская и лежит в плоскости XOY, то последние формулы принимают такой вид:

$$\overline{x}=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma,\quad \overline{y}=\frac{1}{\sigma}\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma,\quad \overline{z}=0, \tag{2}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — координаты центра тяжести площади σ плоской фигуры, а $S_y=\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma$ и $S_x=\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma$ — статические моменты ее соответственно относительно оси Y и X. Покажем, что статический момент можно, как и площадь σ, выразить при помощи простого интеграла. В самом деле, заменим, например, второй двойной интеграл через двукратный (фиг. 130):

$$S_x=\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y\,dy=\frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx, \tag{3}$$

где $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ — уравнения дуг ACB и ADB контура $ACBD$, а $x=a$ и $x=b$ — уравнения касательных к контуру. Переменяя порядок интеграции (стр. 219), пишем (фиг. 131)

$$S_x=\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma=\int_c^d y\,dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx=\frac{1}{2}\int_c^d [x_2(y)-x_1(y)]\,dy, \tag{4}$$

где $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$ — уравнения дуг $LCAQDK$ и $KBPL$ контура $ACBD$ площади σ, а прямые $y=c$ и $y=d$ — касательные к контуру.

В случае кривой трапеции $A'ABB'$ (фиг. 65) $y_1(x)=0$, $y_2(x)=f(x)$, где $y=f(x)$ — уравнение дуги кривой AB, и формулы (3) и (4), после перестановки в формуле (4) букв x и y, принимают такой вид:

$$S_x=\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\,dx,\quad S_y=\int_a^b x f(x)\,dx. \tag{5}$$

Сопоставляя первое выражение с формулой объема тела вращения [часть пятая, гл. II, § 5, формула (4)], получаем $v=2\pi S_x$ или $v=2\pi\overline{x}\sigma$, т.-е. теорему Гюльдена: о б ъ е м т е л а, о б р а з у е м о г о в р а щ е н и е м плоской фигуры вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести площади.

Наконец, в случае плоской линии, расположенной в плоскости XOY, формулы (2) принимают такой вид

$$\overline{x}=\frac{1}{s}\int_{s_0}^{s_1} x\,ds,\quad \overline{y}=\frac{1}{s}\int_{s_0}^{s_1} y\,ds,\quad \overline{z}=0, \tag{6}$$

где s_0 и s_1 — расстояния, отсчитываемые по кривой, концов дуги $s=s_1-s_0$, т.-е. точек A и B, от начала счета дуг (фиг. 96), а $S_y=\int_{s_0}^{s_1} x\,ds$ и $S_x=\int_{s_0}^{s_1} y\,ds$ — статические моменты дуги s относительно осей координат Y и X. Сопоставляя вторую из формул (6) с формулой поверхности вращения (гл. III, § 3), получаем $\Sigma=2\pi\overline{y}\,s$, т.-е. другую теорему Гюльдена: поверхность, образуемая вращением дуги около оси, лежащей в плоскости дуги и эту дугу не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги.

§ 2. Момент инерции.

Моментом инерции J_A тела относительно какой-нибудь оси A называется сумма произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от оси, т.-е.

$$J_A=lim\sum_{v} r^2(x_i, y_i, z_i)\,f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta v_i=\iiint_{v} r^2(x, y, z)\,f(x, y, z)\,dv, \tag{7}$$

где $r(x, y, z)$ — расстояние точки (x, y, z) от оси A, а $f(x, y, z)$ — плотность в той же точке.

Для плоской фигуры, расположенной в плоскости XOY, формула (7) принимает такой вид:

$$J_A=\iint_{\sigma} r^2(x, y)\,f(x, y)\,d\sigma.$$

Моменты инерции однородной плоской фигуры относительно координатных осей представятся, следовательно, таким образом:

$$J_x=g\iint_{\sigma} y^2\,d\sigma,\quad J_y=g\iint_{\sigma} x^2\,d\sigma,\quad J_z=g\iint_{\sigma} \varrho^2\,d\sigma, \tag{8}$$

где g — плотность, а $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$ — радиус-вектор[1]).

---

[1]) Момент инерции J_z называется полярным моментом инерции.

Заменим, например, первый двойной интеграл двукратным (фиг. 130):

$$J_x = g\iint_\sigma y^2\,d\sigma = g\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y^2\,dy = \frac{1}{3}\,g\int_a^b [y_2^3(x) - y_1^3(x)]\,dx, \tag{9}$$

где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — уравнения дуг ACB и ADB контура $ACBD$ площади σ, а прямые $x = a$ и $x = b$ касаются контура. Переменяя порядок интеграции (стр. 219,) пишем (фиг. 131)

$$J_x = g\iint_\sigma y^2 d\sigma = g\int_c^d y^2\,dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx = g\int_c^d y^2\,[x_2(y) - x_1(y)]\,dy, \tag{10}$$

где $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ — уравнения дуг LAK и KBL контура $ACBD$, а $y = c$ и $y = d$ — уравнения касательных к контуру.

В случае кривой трапеции $A'ABB'$ (фиг. 65) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = f(x)$, где $y = f(x)$ — уравнение дуги кривой AB, и формулы (9) и (10), после перестановки в формуле (10) букв x и y, принимают такой вид:

$$J_x = \frac{1}{3}\,g\int_a^b [f(x)]^3\,dx,\quad J_y = g\int_a^b x^2 f(x)\,dx. \tag{11}$$

Сопоставим формулы площади, статического момента и момента инерции относительно оси X кривой трапеции $A'ABB'$ (фиг. 65), полагая плотность $g = 1$:

$$\sigma = \int_a^b f(x)\,dx,\quad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 dx,\quad J_x = \frac{1}{3}\int_a^b [f(x)]^3\,dx.$$

Сделаем то же для произвольной площади (фиг. 88)

$$\sigma = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,\qquad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}\,dx,$$

$$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b \{[f_2(x)]^3 - [f_1(x)]^3\}\,dx.$$

ПРИМЕР. Найти моменты инерции относительно координатных осей X и Y прямоугольника, образованного прямыми

$$x = -\frac{1}{2}b,\quad x = \frac{1}{2}b \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}h,\quad y = \frac{1}{2}h.$$

Найдем сперва момент инерции прямоугольника относительно оси X:

$$J_x = \frac{1}{3}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]dx = \frac{1}{12}h^3\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx = \frac{1}{12}bh^3;$$

по аналогии

$$J_y = \frac{1}{12}hb^3.$$

Рассмотрим в заключение интеграл, входящий в выражение полярного момента инерции, полагая плотность $g=1$, и заменим его двукратным при помощи полярных координат (гл. I, § 3.)

$$J_z=\iint\limits_{\sigma}\varrho^2\,d\sigma=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}d\varphi\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)}\varrho^3\,d\varrho=\frac{1}{4}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\{[\varrho_2(\varphi)]^4-[\varrho_1(\varphi)]^4\}\,d\varphi,$$

где (фиг. 139) φ_0 и φ_1 — амплитуды крайних точек D и C контура, через которые проходят касательные из полюса, а $\varrho=\varrho_1(\varphi)$ и $\varrho=\varrho_2(\varphi)$ уравнения дуг CFD и DEC контура.

Как мы видели (гл. I, § 3), двукратный интеграл в случае полярных координат получает особенно простой вид, когда полюс находится внутри площади, ограниченной контуром $CFDE$, уравнение которого $\varrho=\varrho(\varphi)$. В самом деле, в этом случае $\varphi_0=0$, $\varphi_1=2\pi$, $\varrho_1(\varphi)=0$, $\varrho_2(\varphi)=$ $=\varrho(\varphi)$ и

$$J_z=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}[\varrho(\varphi)]^4\,d\varphi.$$

ПРИМЕР. Найти полярный момент инерции круга диаметра d с центром в полюсе.

В данном случае $\varrho(\varphi)=\frac{1}{2}d$ и, следовательно,

$$J_z=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d}{2}\right)^4d\varphi=\frac{1}{64}d^4\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{32}\pi d^4.$$

ЧАСТЬ СЕДЬМАЯ.

Ряды.

§ 1. Основные понятия.

Пусть даны n чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n;$$

из элементарной математики известно, что разуметь под суммой s_n этих чисел

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{1}$$

или сокращенно

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k. \tag{1}$$

Возьмем теперь (бесконечную) последовательность чисел

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots;$$

является вопрос, что разуметь под суммой ее членов или, как говорят, под суммой S ряда

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \tag{2}$$

или сокращенно

$$S = \Sigma u_n. \tag{2}$$

Для этого возьмем сумму s_n (1) конечного числа n членов и будем искать предел этой суммы в предположении, что число n ее слагаемых неограниченно растет. Если у последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ предел S существует, т.-е., если $lim_{n \to \infty} s_n = S$, то ряд (2) называется **сходящимся**, а предел S — **суммою ряда**; если сумма s_n не стремится ни к какому пределу или растет неограниченно и, следовательно, у ряда (2) нет суммы, то он называется **расходящимся**.

Член u_n называется **общим членом** ряда (2); дать ряд — это значит дать закон образования его общего члена u_n по его номеру n (часть первая, § 1). Разность $R_n = S - s_n$ между суммою ряда S и суммою s_n его n членов называется **остаточным членом** или **остатком ряда**, остановленного на члене номера n. Легко видеть, что остаток R_n в свою очередь служит суммою ряда

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \tag{3}$$

Так как сумма этого ряда $R_n = S - s_n$, где n — некоторое данное число, то оба ряда (2) и (3) одновременно сходятся, а следовательно, одновременно и расходятся. Таким образом, при решении вопроса о сходимости ряда (2) можно пренебречь первыми его n членами, где n — конечное число.

Положим теперь, что n неограниченно растет; тогда, если ряд (2) сходящийся, то остаток $R_n = S - s_n$, как разность между переменной величиной s_n и ее пределом S, есть величина бесконечно малая, так что $lim_{n \to \infty} R_n = 0$. Обратно, если $lim_{n \to \infty} R_n = 0$, то

$$lim_{n \to \infty} s_n = lim_{n \to \infty} (S - R_n) = S$$

и, следовательно, ряд (2) сходящийся. Отсюда, на основании определения бесконечно малой величины, можем дать такое определение сходящегося ряда, равносильное приведенному выше: **ряд называется сходящимся, если для всякого сколь угодно малого наперед заданного положительного числа ε можно найти такое число N, что все остаточные члены, номера которых больше N, меньше этого числа ε.** Эту же мысль можно выразить следующими двумя неравенствами: для $n > N$

$$|R_n| < \varepsilon.$$

Таким образом, остаток сходящегося ряда может быть сделан сколь угодно малым, ввиду чего, если мы вычисляем приближенно, то всегда можем положить $S = s_n$, взяв только n достаточно большим, чтобы остаток R_n был меньше требуемой степени точности. Отсюда же вытекает, что **предел общего члена сходящегося ряда равен нулю.** В самом деле,

$$lim_{n \to \infty} u_n = lim_{n \to \infty} (R_{n-1} - R_{n-2}) = 0. \tag{4}$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим геометрический ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots\ldots; \tag{5}$$

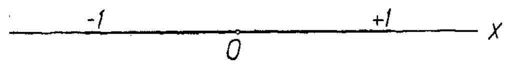
как известно,

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x};$$

если $|x| < 1$, то

$$lim_{n \to \infty} x^n = 0 \text{ и } S = lim\, s_n = lim \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x};$$

если же $|x| > 1$, то x^n одновременно с n стремится к бесконечности и, следовательно, у ряда (5) не будет суммы; у него не будет суммы и тогда, когда $|x| = 1$; в самом деле, если $x = 1$, то $s_n = n$, т.-е. с неограниченным ростом n неограниченно растет и сумма s_n; если же $x = -1$, то $s_1 = 1$, $s_2 = 1 - 1 = 0$, $s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$ и т. д., так что сумма s_n не стремится ни к какому пределу с ростом n. Таким образом, ряд (5) сходится только для значений аргумента x, лежащих между -1 и $+1$, или, как говорят, интервал сходимости (фиг. 148) рассматриваемого ряда $(-1, +1)$.



Фиг. 148.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{6}$$

Так как $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

следовательно,

$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т.-е. ряд (6) сходящийся и сумма его равна 1.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{7}$$

Представим его в таком виде

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

и сравним с таким рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

В этом ряде

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1,\quad s_4 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2,\quad s_8 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 3,\quad s_{16} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 4$$

и вообще

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} m, \quad \text{где} \quad n = 2^m;$$

следовательно, у этого ряда сумма s_n неограниченно растет одновременно с числом n членов; подавно будет неограниченно расти сумма σ_n гармонического ряда, так как

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \text{ и т. д.}$$

и, следовательно, $\sigma_n > s_n$. Таким образом, гармонический ряд — расходящийся, несмотря на то, что его общий член $\frac{1}{n}$ величина бесконечно малая. Последнее обстоятельство указывает, что равенство нулю предела общего члена ряда есть необходимое условие сходимости, но не достаточное.

Так как отыскание предела остаточного члена обычно представляет большие трудности, то необходимое и достаточное условие сходимости ряда, которое мы изложили в виде определения, на практике имеет мало значения. Поэтому мы дадим несколько признаков сходимости, т.-е. правил, при помощи которых можно решить вопрос о сходимости или расходимости данного ряда путем рассмотрения свойств его общего члена или соотношения между ним и конечным числом последующих членов.

§ 2. Положительные ряды.

Знакопостоянным рядом называется такой, у которого все члены имеют один и тот же знак. Мы будем рассматривать только положительные ряды, т.-е. такие, у которых все члены положительны и, в частности, равны нулю, так как к ним можно свести исследование рядов с отрицательными членами. Так, например, из того, что $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, вытекает, что сумма ряда $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots$ равна -2.

У положительного ряда сумма $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ возрастает вместе с n, так что для существования предела S суммы s_n, т.-е. для сходимости этого ряда, необходимым и достаточным условием является существование при всяком n неравенства $a > s_n$, где a — какое-нибудь положительное число. В самом деле, в этом случае значения s_n представляют монотонную — именно неубывающую — последовательность, все члены которой заключены в конечном промежутке $(0, a)$; следовательно (часть первая, §. 2), она имеет предел S внутри этого промежутка; таким образом, все рассматриваемые величины удовлетворяют неравенствам

$$a > S \geqslant s_n > 0.$$

Для получения признака сходимости положительного ряда сравним его с исследованным уже геометрическим рядом; с этой целью докажем предварительно такую теорему: **если даны два положительных ряда Σu_n и Σv_n, из которых второй сходится, и если все члены его, начиная с некоторого номера, больше или равны соответствующим членам первого ряда, то первый ряд тоже сходится.**

В самом деле, пусть

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \tag{1'}$$

и

$$\sigma = \Sigma v_n. \tag{2'}$$

Так как при решении вопроса о сходимости ряда можно отбросить конечное число членов (§ 1), то положим, что соотношение $v_n \geqslant u_n$ имеет место, начиная с первого члена; тогда очевидно, для любого n

$$\sigma \geqslant \sigma_n \geqslant s_n > 0,$$

т.-е. сумма s_n есть неубывающая переменная величина, изменяющаяся в конечном промежутке $(0, \sigma)$; следовательно (часть первая, § 2), она имеет предел S внутри этого интервала, так что $\sigma \geqslant S > 0$; ряд (2) — сходящийся [1]).

На основании доказанной теоремы можно вывести **признак сходимости Даламбера: если, начиная с некоторого номера m, отношение каждого члена положительного ряда к своему предыдущему меньше числа ϑ, где ϑ — положительное число, меньшее единицы, то ряд сходится; он расходится, если это отношение, начиная с некоторого номера m, больше или равно 1.**

В первом случае

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \vartheta, \quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < \vartheta, \quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} < \vartheta, \; . \; . \; . \; .$$

или

$$u_{m+1} < \vartheta u_m, \quad u_{m+2} < \vartheta u_{m+1} < \vartheta^2 u_m, \quad u_{m+3} < \vartheta u_{m+2} < \vartheta^3 u_m, \; . \; . \; . \; . \; ,$$

т.-е. члены ряда (2), начиная с некоторого номера m, меньше соответственных членов сходящегося (так как $\vartheta < 1$) геометрического ряда

$$u_m + \vartheta u_m + \vartheta^2 u_m + \vartheta^3 u_m + \; . \; . \; . \; . \; ,$$

так что ряд (2) тоже сходится.

1) Тем же путем можно доказать теорему: если ряд (2) расходящийся, то и ряд (2') тоже расходящийся; фактически мы пользовались этой теоремой при исследовании гармонического ряда (§ 1).

Во втором случае, когда $\frac{u_{m+1}}{u_m} \geqslant 1$, $\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \geqslant 1, \ldots$, ряд (2) расходится, так как

$$u_{m+1} \geqslant u_m, \quad u_{m+2} \geqslant u_{m+1}, \quad u_{m+3} \geqslant u_{m+2}, \ldots,$$

т.-е. u_n с ростом номера n не убывает и поэтому $lim\, u_n \neq 0$ (§ 1).

Этот же признак Даламбера можно представить в таком виде: если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при возрастании n стремится к пределу q, то ряд (2) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Рассмотрим первый случай и возьмем такое число ϑ, что $q < \vartheta < 1$; так как $lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то $lim_{n\to\infty}\left(\vartheta - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \vartheta - q > 0$, так что, начиная с некоторого номера m, переменная величина $\vartheta - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет иметь тот же знак (часть первая, § 8, теорема 4), что и предел $\vartheta - q$, т.-е. $\vartheta - \frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$; отсюда $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \vartheta < 1$; следовательно, ряд (2), как только что мы видели, сходящийся.

Во втором случае возьмем такое число p, что $q > p > 1$; тогда $lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - p\right) = q - p > 0$ и поэтому (часть первая, § 8, теорема 4), начиная с некоторого номера m, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - p > 0$ или $\frac{u_{n+1}}{u_n} > p > 1$, т.-е. ряд (2) расходящийся.

Случай $q = 1$ называется сомнительным, как так ряд (2) может сходиться, может и расходиться; для решения вопроса надо обратиться к более сильным признакам сходимости, например, к признакам Коши, Раабе и др.

ПРИМЕР 1.

$$1 + \left|\frac{x}{1!}\right| + \left|\frac{x^2}{2!}\right| + \left|\frac{x^3}{3!}\right| + \ldots + \left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right| + \left|\frac{x^n}{n!}\right| + \ldots \qquad (8)$$

Ряд этот сходится при всяком x, так как

$$lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\,(n-1)!}{n!\,x^{n-1}}\right| = lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n} = 0.$$

Таким же свойством обладают и следующие два ряда (примеры 2 и 3).

ПРИМЕР 2.

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}(2n-2)!}{(2n)!\,x^{2n-2}} = lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n-1)\,2n} = 0.$$

ПРИМЕР 3.

$$\left|\frac{x}{1!}\right|+\left|-\frac{x^3}{3!}\right|+\left|\frac{x^5}{5!}\right|+\ldots+\left|\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right|+$$
$$+\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|+\ldots;$$
$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!(-1)^{n-1}x^{2n-1}}\right|=$$
$$=lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2n(2n+1)}=0.$$

ПРИМЕР 4.

$$1+\left|\frac{m}{1!}x\right|+\left|\frac{m(m-1)}{2!}x^2\right|+\ldots+$$
$$+\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}\right|+$$
$$+\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\right|+\ldots; \tag{9}$$

этот ряд сходится только при $|x|<1$, так как

$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n(n-1)!}{n!\,m(m-1)\ldots(m-n+2)x^{n-1}}\right|=$$
$$=lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x\right|=|x|.$$

ПРИМЕР 5.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots \tag{6}$$

Так как

$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1,$$

то получается сомнительный случай; мы видели (§ 1), что этот ряд сходящийся.

ПРИМЕР 6.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots \tag{7}$$

Так как

$$lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,$$

то получается сомнительный случай; мы видели (§ 1), что гармонический ряд расходящийся.

§ 3. Абсолютно сходящиеся ряды.

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\ldots$$

абсолютно сходящийся, так как ряд, составленный из модулей его членов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots$$

сходится. Очевидно, что абсолютно сходящийся ряд сходится; благодаря этому, признак Даламбера можно применять не только к положительным рядам.

ПРИМЕР 1.

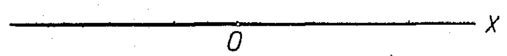
$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{10}$$

Ряд этот сходится при всяком x, так как этим свойством обладает ряд (8), составленный из модулей его членов. По той же причине сходятся при всяком x следующие два ряда:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \tag{11}$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{12}$$

Таким образом, ряды (10), (11), (12) сходятся для всех значений аргумента x, т.-е. на всей оси X (фиг. 149), если мы изобразим числа



Фиг. 149.

точками прямой; функции, которые определяются этими рядами, называются целыми, так как самый простой пример их представляет многочлен, т.-е. целая рациональная функция.

ПРИМЕР 2.

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ldots \tag{13}$$

Ряд этот сходится при $|x|<1$, т.-е. для тех значений аргумента x, которые лежат внутри интервала $(-1, 1)$ (фиг. 148), ввиду того, что ряд (9), составленный из модулей его членов, сходится при тех же условиях.

Обратное доказанной теореме положение не верно, т.-е. у сходящегося ряда ряд модулей его членов может и не сходиться. Примером этого может служить знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots; \tag{14}$$

ряд этот называется знакопеременным, так как знаки его членов чередуются; он сходится, так как существует теорема, которую мы доказывать не станем: знакопеременный ряд сходится, если модули членов его с возрастанием номера постоянно убывают и имеют пределом нуль; мы увидим в дальнейшем (§ 5), что сумма его равна $\ln 2$. Между тем, ряд модулей его членов представляет гармонический ряд (7); следовательно, ряд (14) не абсолютно сходящийся или, как говорят, условно сходящийся.

§ 4. Равномерно сходящиеся ряды.

Рассмотрим ряд

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого непрерывные функции x.

Совокупность всех тех значений аргумента, при которых этот ряд сходится, называется областью сходимости ряда. Если ряд этот сходящийся при данном значении x, то, как мы видели, для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно подыскать такое число N (вообще, зависящее от данного значения x), что, при всяком $n>N$, модуль остатка ряда $|R_n(x)|<\varepsilon$.

В случае переменного x сумма $S(x)$, вообще говоря, прерывная функция. Оказывается, что сумма $S(x)$ является непрерывной функцией, между прочим, в случае так называемых равномерно сходящихся рядов.

Ряд называется равномерно сходящимся в промежутке (a, b), если для всякого сколько угодно малого положительного числа ε можно подыскать такое число N, не зависящее от x, что при всяком $n>N$

$$|R_n(x)|<\varepsilon.$$

Кроме отмеченного выше свойства равномерно сходящихся рядов, мы укажем, также без доказательства, что их можно интегрировать почленно, а следовательно, и обратно: ряд можно дифференцировать почленно, если полученный в результате дифференцирования ряд — равномерно сходящийся. Эти свойства равномерно сходящихся рядов приобретают особенно важное значение потому, что к числу их принадлежат часто встречающиеся так называемые степенные ряды; к рассмотрению их мы и перейдем.

§ 5. Степенные ряды.

Пусть дан ряд следующего вида:

$$a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + \ldots + a_n(t-a)^n + \ldots;$$

он известен под названием степенного ряда или ряда Тэлора.

Преобразуем его, полагая $t - a = x$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

или*)

$$\Sigma a_n x^n. \tag{15}$$

Мы уже рассматривали ряды подобного вида и установили, что некоторые ряды, например, (10), (11) и (12), сходятся на всей оси X, другие, например, (5) и (13),—только на отрезке ее в интервале $(-1, 1)$; наконец, ряд

$$1 - 2!x + 3!x^2 - 4!x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} n!\, x^{n-1} + \\ + (-1)^n (n+1)! x^n + \ldots \tag{16}$$

является примером ряда, всюду расходящегося, за исключением начала координат, т.-е. $x = 0$. В самом деле,

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n (n+1)!\, x^n}{(-1)^{n-1} n!\, x^{n-1}}\right| = lim_{n\to\infty}|(n+1)x| = \infty$$

при всяком x, за исключением $x = 0$.

Применим те же соображения к ряду (15), причем введем такие обозначения:

$$|x| = \varrho,\ |a_n| = A_n,\ lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}} = R\ {}^{**}).$$

Применим признак Даламбера (§ 2): ряд (15) сходится, если

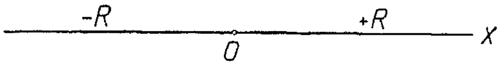
$$lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_r}\right| = lim\,\frac{A_{n+1}\varrho^{n+1}}{A_n \varrho^n} = \frac{\varrho}{R} < 1\,.$$

Следовательно (§ 3), ряд (15) абсолютно сходится, если $|x| = \varrho < R$, т.-е. если x находится внутри интервала $(-R, +R)$; этот интервал длиною $2R$ и с центром в начале координат называется **интервалом**

*) Этот частный вид ряда Тэлора называется также рядом Маклорена.

**) Мы не будем рассматривать случая, когда этот предел не существует.

сходимости, а предел R — радиусом сходимости; оказывается, что ряд (15) вне интервала сходимости расходится; что же касается границ интервала сходимости, т.-е. точек $+R$ и $-R$, то одни степенные ряды сходятся в обеих точках, другие расходятся в них, а третьи в одной сходятся, в другой расходятся. Наконец, ряд (15) и получающийся



Фиг. 150.

из него путем почленного дифференцирования ряд $a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$ сходятся равномерно внутри интервала сходимости, и, следовательно, внутри его степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Приводить доказательства всех этих положений мы не станем.

Примером степенного ряда, расходящегося на обеих границах, может служить, как мы видели (§ 1), геометрический ряд (5); примером ряда, сходящегося на одной границе и расходящегося на другой, может служить ряд, получающийся путем почленного интегрирования геометрического ряда (5), — именно

$$s(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots; \tag{16}$$

в самом деле, полагая $x = 1$, приходим к гармоническому ряду (7), который, как мы знаем (§ 1), расходится; давая же аргументу значение -1, мы получаем ряд (16), отличающийся от (14) только знаком у суммы и, следовательно, тоже сходящийся. Кстати, подсчитаем эту сумму: так как сумма геометрического ряда равна $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$, то при том же условии сумма $s(x)$ ряда (16) равна $-\ln|1-x| + C$; для определения постоянного C полагаем $x = 0$:

$$-\ln 1 + C = s(0);$$

так как $s(0) = 0$,

$$-\ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots; \tag{16}$$

меняя знак у аргумента x, получаем

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots; \tag{17}$$

отсюда при $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots. \tag{18}$$

Воспользуемся свойством степенного ряда, что его можно почленно дифференцировать в интервале сходимости, чтобы получить некоторые результаты для исследованных уже нами рядов.

ПРИМЕР 1.

$$s(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots, \qquad (10)$$

$$s'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

следовательно, $s'(x) = s(x)$; тем же свойством, что производная равна самой функции, обладает e^x.

ПРИМЕР 2.

$$s(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

$$-s'(x) = \sigma(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad (12)$$

$$-s''(x) = \sigma'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-2} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots; \qquad (11)$$

следовательно, $s''(x) = -s(x)$; тем же свойством обладают функции $\sin x$, $\cos x$ и $\sigma(x)$.

Мы получили, что функция (10) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = y$, т.-е. служит его частным интегралом; точно так же функции (11) и (12) суть интегралы дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Найдем также дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция, определяемая рядом (13).

ПРИМЕР 3.

$$s_m(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (13)$$

$$s_m'(x) = m\left[1 + \frac{m-1}{1!}x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots\right];$$

внутри скобок стоит та же функция, что и (13), только номер ее не m, а $m-1$, т.-е. на единицу меньше; следовательно,

$$s_m'(x) = m\, s_{m-1}(x).$$

Рассмотрим теперь произведение

$$(1+x)s_{m-1}(x)=1+\left[\frac{m-1}{1!}+1\right]x+\left[\frac{(m-1)(m-2)}{2!}+\frac{m-1}{1!}\right]x^2+$$
$$+\left[\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}\right]x^3+\ldots.$$

или [1])

$$(1+x)s_{m-1}(x)=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots.=s_m(x); \qquad (13)$$

следовательно,

$$s_m'(x)=\frac{ms_m}{1+x},$$

так что функция (13) служит интегралом дифференциального уравнения

$$(1+x)\frac{dy}{dx}=my.$$

ПРИМЕР 4. Выразить коэффициенты сходящегося в некотором интервале степенного ряда (15) через сумму его.

Пусть

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.+a_nx^n+\ldots. \qquad (15)$$

Путем последовательного дифференцирования получаем ряды, сходящиеся в том же интервале:

$$s'(x)=1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots.+na_nx^{n-1}+\ldots.,$$
$$s''(x)=1\cdot2a_2+2\cdot3a_3x+\ldots.+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots.,$$
$$s'''(x)=1\cdot2\cdot3a_3+\ldots.+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+\ldots.,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)na_n+\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1]) Тождества $\frac{m-1}{1!}+1=\frac{m}{1!}$, $\frac{(m-1)(m-2)}{2!}+\frac{m-1}{1!}=\frac{m(m-1)}{2!}$ и т. д. представляют частные случаи известной в элементарной алгебре формулы теории сочетаний:

$$C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}=\frac{(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)(m-n)}{n!}+$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{(n-1)!}=$$
$$=\frac{(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{n!}[m-n+n]=$$
$$=\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{n!}=C_m^n;$$

из приведенного доказательства следует, что эта формула верна при всяком m, не только целом.

Полагая $x=0$, получаем

$$s'(0)=1!\,a_1,\quad s''(0)=2!\,a_2,\quad s'''(0)=3!\,a_3,\ .\ .\ .\ ,\ s^{(n)}(0)=n!\,a_n,\ .\ .\ .\ .\ ;$$

на основании этого степенной ряд (15) получает такой вид:

$$s(x)=s(0)+\frac{x}{1!}s'(0)+\frac{x^2}{2!}s''(0)+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{x^n}{n!}s^{(n)}(0)+\ .\ .\ .\ .\ \quad (19)$$

Это частный случай ряда Тэлора — ряд Маклорена; поэтому степенной ряд (15) и называется также рядом Тэлора. Раньше (часть вторая, гл. II, § 4) мы получили частный случай формулы Тэлора — формулу Маклорена

$$s(x)=s(0)+\frac{x}{1!}s'(0)+\frac{x^2}{2!}s''(0)+\ .\ .\ .\ +\frac{x^n}{n!}s^{(n)}(0)+R_n, \qquad (20)$$

где R_n — остаточный член.

Формула (20) Тэлора (Маклорена) имеет место для всякой функции, у которой существуют производные, кончая порядком $n+1$; ряд (19) Тэлора (Маклорена) имеет место не для всякой функции, а только в том случае, если он сходится.

§ 6. Разложение функций в степенные ряды.

Для разложения функции $y=f(x)$ в степенной ряд можно, как мы видели (часть вторая, гл. V, § 7), взять формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\ .\ .\ .\ .\ +\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n$$

и путем перехода к пределу, при n неограниченно возрастающем, получить ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\ .\ .\ .\ +\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Этот переход к пределу требует, чтобы остаток R_n при неограниченном возрастании n стремился к нулю, т.-е. $lim_{n\to\infty}R_n=0$. Между тем, нахождение условий, при которых $lim_{n\to\infty}R_n=0$, в большинстве случаев представляет громадные трудности. Ввиду этого раньше (часть вторая, гл. V, § 7) мы получили разложения функций чисто формальным путем не исследуя остаточных членов; теперь же для одних функций (круговых) мы используем возможность почленного интегрирования степенного ряда (§ 5) внутри интервала сходимости, как мы уже сделали в случае логарифма (§ 5); для других [e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$] функций воспользуемся приемом, состоящим в том, что берут сходящийся ряд и затем доказывают тождество его суммы с функцией, разложение которой надо получить.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ряд

$$s(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots, \tag{10}$$

сходящийся для всех значений x (§ 3). Покажем, что $s(x)=e^x$.

В самом деле, как мы видели (§ 5), функция (10) служит интегралом дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=y$, у которого общий интеграл $y=Ce^x$ (часть третья, гл. IV, § 2, пример 2); следовательно, $s(x)=Ce^x$; полагая $x=0$ и принимая во внимание, что $s(0)=1$, получаем $1=Ce^0$, откуда $s(x)=e^x$ и, следовательно,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{10}$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ряд

$$s(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{11}$$

и другой ряд, получающийся из него путем дифференцирования,

$$-s'(x)=\sigma(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots; \tag{12}$$

оба ряда сходятся для всех значений x (§ 3). Покажем, что

$$s(x)=\cos x$$

и

$$\sigma(x)=\sin x.$$

Действительно, мы видели (§ 5), что функции (11) и (12) служат интегралами дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$, у которого общий интеграл $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ (часть третья, гл. IV, § 3, II, 1); следовательно,

$$s(x)=C_1\sin x+C_2\cos x,$$

$$\sigma(x)=C_1\sin x+C_2\cos x,$$

откуда

$$s'(x)=C_1\cos x-C_2\sin x,$$

$$\sigma'(x)=C_1\cos x-C_2\sin x;$$

полагая $x=0$ и принимая во внимание, что $s(0)=1$, $s'(0)=0$, $\sigma(0)=0$, $\sigma'(0)=1$, получаем в первом случае

$$s(0)=C_1\sin 0+C_2\cos 0,$$
$$s'(0)=C_1\cos 0-C_2\sin 0$$

и, следовательно,

$$C_2 = 1,\ \ C_1 = 0,\ \ s(x) = \cos x,$$

а во втором случае

$$\sigma(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0,$$

$$\sigma'(0) = C_1 \cos 0 - C_2 \sin 0,$$

откуда

$$C_2 = 0,\ \ C_1 = 1,\ \ \sigma(x) = \sin x.$$

Таким образом,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \tag{12}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим ряд

$$s(x) = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \tag{13}$$

сходящийся для всех значений x в интервале $(-1, +1)$. Покажем, что равенство $s(x) = (1+x)^m$ существует не только для m целого положительного [когда ряд (13) обращается (часть вторая, гл. V, § 6) в многочлен, представляющий известное из элементарной алгебры разложение по формуле бинома Ньютона], но и для произвольного m.

В самом деле, как мы видели (§ 5), функция (13) служит интегралом дифференциального уравнения $(1+x)\frac{dy}{dx} = my$, у которого общий интеграл $y = C(1+x)^m$ (часть третья, гл. IV, § 2, пример 3); следовательно,

$$s(x) = C(1+x)^m;$$

полагая $x = 0$ и принимая во внимание, что $s(0) = 1$, получаем $C = 1$ и, следовательно,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \tag{13}$$

ПРИМЕР 4. Мы видели (§ 5), что

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \tag{17}$$

ПРИМЕР 5. Заменив в геометрическом ряде (5) x через $-x^2$, получим для $|x|<1$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\cdots,$$

откуда по интегрировании

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx-\int_0^x x^6dx+\cdots+$$
$$+(-1)^{n+1}\int_0^x x^{2n}dx+\cdots.$$

или

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

Полученный ряд сходится не только при $|x|<1$, как его производный, но и при $|x|=1$, так как в последнем случае получается убывающий знакопеременный ряд (§ 3)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

ПРИМЕР 6. Положим в примере третьем $m=-\frac{1}{2}$ и заменим x через $-x^2$:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}(-x^2)^2+$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3+$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-x^2)^4+\cdots.$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\cdots;$$

отсюда

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\cdots.$$

или

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

ПРИМЕР 7. Длина дуги эллипса выражается через произведение большой полуоси на эллиптический интеграл 2-го рода:

$$E(e, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

где e — эксцентриситет и $\sin\varphi = \frac{x}{a}$ *). Так как у эллипса $e < 1$, то $|e \sin\varphi| < 1$ для всех значений φ, и поэтому мы можем воспользоваться рядом примера 3-го, заменяя в нем x через $-e^2 \sin^2\varphi$ и m через $\frac{1}{2}$;

$$(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\varphi - \frac{1 \cdot e^4}{2 \cdot 4}\sin^4\varphi - \frac{1 \cdot 3 \cdot e^6}{2 \cdot 4 \cdot 6}\sin^6\varphi - \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot e^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\sin^8\varphi \ldots,$$

откуда

$$E(e, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\varphi d\varphi - \frac{e^2}{2}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{1 \cdot e^4}{2 \cdot 4}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi \ldots$$

Прием вычисления $\int \sin^{2k}\varphi\, d\varphi$ был указан [часть третья, гл. I, § 6, пример 6]. В частности для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi - \ldots\ldots;$$

так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = -\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1}\varphi \cos\varphi + (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2}\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$$

и

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi,$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2}\varphi\, d\varphi;$$

понижая таким образом степень $\sin\varphi$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}\, \frac{\pi}{2}$$

и

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^3\right)^2 - \\ - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^4\right)^2 - \ldots\right].$$

*) На стр. 135 $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Этот ряд тем быстрее сходится, чем эксцентриситет e ближе к нулю, т.-е. чем эллипс ближе к окружности; при $e=0$ $E=\frac{\pi}{2}$, откуда длина окружности $4a\frac{\pi}{2}=2\pi a$.

ПРИМЕР 8. Длина дуги гиперболы выражается через эллиптические интегралы второго $E(e,\varphi)$ и первого рода

$$F(e,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cdot$$

Если $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то получаем полный эллиптический интеграл первого рода

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

Так как (пример 6)

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=1+\frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^4\sin^4\varphi+\ldots,$$

то

$$F(e,\varphi)=\varphi+\frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^4\int_0^\varphi\sin^4\varphi\,d\varphi+\ldots$$

и

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+\frac{1}{2}e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi+\ldots$$

или

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}e\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^2\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e^3\right)^2+\ldots\right].$$

ЧАСТЬ ВОСЬМАЯ.

Приближенное вычисление интегралов.

Для целого ряда вопросов техники достаточно бывает отыскать только приближенное значение того или другого интеграла, что значительно упрощает, как мы увидим дальше, вычисления, так как в большинстве случаев отыскиваемый интеграл или не выражается в конечном виде через элементарные функции или, если выражается, то в очень сложном виде.

§ 1. Ряды.

В теории рядов мы задавались целью найти разложение функции, эквивалентное ей, по крайней мере, в некотором интервале, и таким образом пришли к понятию о сходящемся ряде. Если же требуется найти *приближенное* значение данной функции, в частности определенного интеграла, то для этой цели нужно, как мы видели (часть вторая, гл. V), ограничиться конечным числом членов разложения ее и, следовательно, важно только, чтобы остаток был достаточно мал, когда мы возьмем надлежащее число членов.

Для пояснения рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1. С целью вычислить приближенно $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}$ возьмем тождество

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n-2}+\frac{x^{2n}}{1-x^2},$$

откуда

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\int_0^x dx+\int_0^x x^2dx+\ldots+\int_0^x x^{2n-2}\,dx+\int_0^x \frac{x^{2n}}{1-x^2}\,dx$$

или

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R_n,$$

где (часть третья, гл. II, § 6, теорема 7)

$$R_n=\int_0^x \frac{x^{2n}}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{1-\vartheta x^2}\int_0^x x^{2n}\,dx=\frac{1}{1-\vartheta x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Положив $x=\frac{1}{3}$, получаем

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,3^{2n-1}}+R_n\right],$$

где

$$R_n=\frac{1}{1-\frac{1}{9}\vartheta}\cdot\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}},$$

откуда

$$|R_n|<\frac{1}{8\,(2n+1)\,3^{2n-1}}.$$

Неравенство это показывает, что, если возьмем только два члена разложения $2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}\right)$, то получим значение $\ln 2$ с ошибкой меньшей, чем $^1/_{540}$, т.-е. $\ln 2 = 0{,}667+0{,}025=0{,}692$ с точностью до 0,002. Найденное в теории рядов разложение (часть седьмая, § 5) для $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ даст значение $\ln 2$ всего с точностью до 0,01, если взять 100 членов. Этот пример показывает, что при вычислениях имеет значение не столько сходимость ряда, сколько быстрота, с какой он сходится.

ПРИМЕР 2. Неэлементарная функция — интегральный синус

$$\operatorname{Si}x=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,du$$

разлагается в такой ряд (часть вторая, гл. V, § 4):

$$\operatorname{Si}x = x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n}\cos(\vartheta x)\,dx;$$

следовательно,

$$|R_n|<\frac{1}{(2n+1)!}\left|\int_0^x x^{2n}\,dx\right|,\quad \text{т.-е.}\quad |R_n|<\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}.$$

Легко заметить, что члены этого ряда начинают убывать при больших значениях x не с первых членов; поэтому, хотя этот ряд сходится при всех значениях x, им пользуются для вычислений при $|x|\leqslant 17$. Для бо́льших по модулю значений x применяют расходящийся ряд, остаток которого сначала убывает, а затем только начинает возрастать.

§ 2. Формулы трапеций и парабол.

Когда мы заменяли функцию $y=f(x)$ под символом интеграла через первые члены ее разложения в степенной ряд

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots,$$

то, с точки зрения геометрии, мы при вычислении площади кривой трапеции брали вместо линии $y=f(x)$ прямую $y=a_0$, или касательную в точке $(0, a_0)$ $y=a_0+a_1x$, или параболу $y=a_0+a_1x+a_2x^2$, или вообще параболу n-го порядка $y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, причем эти параболы соприкасающиеся в точке $(0, a_0)$, т. е. наиболее тесно примыкающие к кривой $y=f(x)$ в этой точке (часть вторая, гл. II, § 4). Но можно поступить иначе: взять на кривой $y=f(x)$ две, три или вообще $n-1$ точку и провести через них соответственно хорду, или параболу 2-го порядка, или вообще параболу n-го порядка.

В дальнейшем будем полагать, что в определенном интеграле

$$\sigma=\int_a^b f(x)\,dx$$

$a<b$ и $f(x)>0$ и что соответствующая дуга кривой $y=f(x)$ не имеет точек перегиба, так что обращена своей выпуклостью в одну сторону.

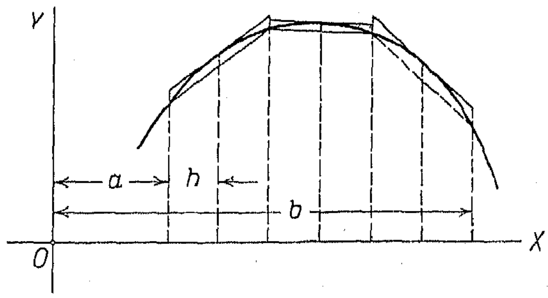
Разделим интервал (a, b) на четное число $2n$ равных частей, так что каждая часть $h=\frac{b-a}{2n}$, и площадь σ соответственно на площади $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_k, \ldots, \sigma_{2l-1}, \sigma_{2l}, \ldots, \sigma_{2n}$ (фиг. 151).

Сравнивая сумму площадей $\sigma_{2l-1}+\sigma_{2l}$ с заключенной в них площадью трапеции, образованной хордой, проходящей через точки

$$(x_{2l-2}, \; y_{2l-2}) \text{ и } (x_{2l}, \; y_{2l}),$$

где

$$x_{2l-2}=a+2(l-1)h,$$
$$x_{2l}=a+2lh,$$
$$y_{2l-2}=f(x_{2l-2}),$$
$$y_{2l}=f(x_{2l}),$$



Фиг. 151.

получаем[1])

$$\sigma_{2l-1}+\sigma_{2l}>h(y_{2l-2}+y_{2l}),$$

откуда[1])

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{2n}>h(y_0+y_2+y_2+y_4+y_4+\ldots+y_{2n-2}+ \\ +y_{2n-2}+y_{2n})$$

или[1])

$$\sigma>S=2h\left(\frac{y_0}{2}+y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}+\frac{y_{2n}}{2}\right).$$

---

[1]) Если кривая обращена выпуклостью вниз, то смысл неравенства обратный.

Полагая приближенно

$$\sigma = 2h\left(\frac{y_0}{2} + y_2 + \ldots + y_{2n-2} + \frac{y_{2n}}{2}\right)$$

и заменяя $2h$ через $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $2n$ через n, т.-е. деля интервал (a, b) не на $2n$, а на n равных частей, получаем формулу трапеций

$$\sigma = \int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right).$$

Проведем теперь касательные в точках с нечетными номерами; тогда, сравнивая площади полученных трапеций с заключенными в них площадями $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n}$, получаем[1])

$$\sigma_{2l-1} + \sigma_{2l} < 2hy_{2l-1}$$

и отсюда[1])

$$\sigma < \Sigma = 2h\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2l-1} + \ldots + y_{2n-1}).$$

Так как касательные более тесно примыкают к кривой, чем хорды, то σ для достаточно больших значений n будет расположено обычно ближе к Σ, чем к S, так что обычно $\dfrac{\Sigma - \sigma}{\sigma - S} = \vartheta$, где $0 < \vartheta < 1$. Отсюда

$$\sigma = \frac{\Sigma + \vartheta s}{1 + \vartheta}.$$

Положим $\vartheta = \dfrac{1}{2}$ и напишем приближенное равенство

$$\sigma = \frac{\Sigma + \frac{1}{2}S}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\Sigma + S}{3} = \frac{2h}{3}\Big[2\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) +$$
$$+ \left(\frac{y_0}{2} + y_2 + \ldots + y_{2n-2} + \frac{y_{2n}}{2}\right)\Big].$$

Отсюда, заменяя h через его значение $h = \dfrac{b-a}{2n}$, получаем приближенное равенство

$$\sigma = \int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6n}\,[y_0 + y_{2n} + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) +$$
$$+ 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})],$$

которое называется формулой Симпсона или формулой парабол. Последнее название объясняется тем, что, как легко проверить, площадь,

[1]) Если кривая обращена выпуклостью вниз, то смысл неравенства обратный.

ограниченная осью X, прямыми $x=a$, $x=b$ и параболой $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, равна $\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$, где $h=\frac{b-a}{2}$, $y_0=\varphi(a)$, $y_1=\varphi(a+h)$, $y_2=\varphi(b)$, $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ввиду этого формула Симпсона с геометрической точки зрения представляет замену площади кривой трапеции, образованной линией $y=f(x)$, суммой площадей кривых трапеций, образованных параболами второго порядка, оси которых параллельны оси Y; первая из этих парабол проходит через точки данной кривой (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), вторая — через точки (x_2, y_2), (x_3, y_3), $(x_4\, y_4)$ и т. д.

Легко видеть, что ошибка при пользовании формулой Симпсона не может превосходить

$$\left|\frac{S+2\Sigma}{3}-S\right|=\frac{2}{3}\left|\Sigma-S\right|.$$

Впрочем, существует гораздо более точное выражение остатка формула Симпсона.

ПРИМЕР 1.

$$\ln 2=\int_1^2\frac{dx}{x}=\frac{1}{36}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{6}{7}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{6}{11}\right)+\right.$$
$$\left.+4\left(\frac{12}{13}+\frac{4}{5}+\frac{12}{17}+\frac{12}{19}+\frac{4}{7}+\frac{12}{23}\right)\right],$$

где $2n=12$ и $h=\frac{1}{12}$. Отсюда

$$\ln 2=0{,}028+0{,}014+0{,}048+0{,}042+0{,}037+0{,}033+0{,}030+0{,}103+$$
$$+0{,}089+0{,}078+0{,}070+0{,}063+0{,}058=0{,}693.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить π.

Положим в формуле трапеций $n=4$, $a=0$, $b=1$, $y=\frac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1-0}{4}\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\frac{1}{2}y_4\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{16}{17}+\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot 3{,}131.$$

Положим теперь в формуле Симпсона $n=2$:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1-0}{12}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right]=$$
$$=\frac{1}{12}\left[1+4\cdot\frac{16}{17}+2\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{16}{25}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\cdot 3{,}14157.$$

Мы видим, насколько формула Симпсона дает бо́льшую точность.

при тех же пяти ординатах; чтобы получить такую же точность при помощи (часть седьмая, § 6) разложения[1])

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + R_n,$$

где $|R_n| < \frac{1}{2n+3}$, надо взять около 50 000 членов.

Если функция дана графически, то нужно измерить ординаты $y_0, y_1, \ldots$, вместо того, чтобы вычислять их.

§ 3. Приборы.

Существует ряд приборов — планиметры, интеграторы, интеграфы и т. п., при помощи которых можно измерить площадь фигуры или начертить интегральную кривую $y = F(x)$, где $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, раз дана графически дифференциальная кривая $y = f(x)$, и получить числовое значение интеграла. Особенно выделяется по простоте принципа, на основании которого он построен, и по большому числу различных приложений интеграф русского инженера Абданк-Абакановича.

---

[1]) Остаточный член R_n вычисляется приемом, указанным в § 1.

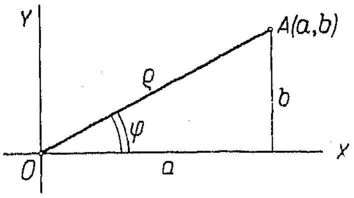
ЧАСТЬ ДЕВЯТАЯ.

Комплексные числа.

Понятие о целом числе в своем развитии привело к дробным, иррациональным и относительным числам, известным под общим названием действительных чисел. Дальнейшим обобщением являются комплексные числа; комплексным (сложным) числом называется совокупность двух действительных чисел; из них первое называется действительной частью, а второе — мнимой. С таким комплексным числом, состоящим из пары чисел, мы уже встречались в аналитической геометрии на плоскости; там каждой точке плоскости соответствует пара чисел (a, b), т.-е., как мы теперь скажем, комплексное число (a, b) или, как принято также обозначать, $a + ib$, где символ $+$ обозначает, что рассматривается совокупность [1]) двух чисел; равным образом запись ib или, что то же, bi, указывает на то, что b является вторым элементом, т.-е. мнимой (imaginaire) частью этой совокупности чисел.

§ 1. Геометрическое изображение.

Из сказанного вытекает, что подобно тому, как действительные числа можно представлять при помощи точек и отрезков на прямой, точно так же и комплексные числа можно изображать при помощи точек и отрезков на плоскости. В самом деле, мы видели, что комплексному числу $a + ib$ или, что то же, (a, b), соответствует точка плоскости с абсциссой a и ординатой b; ввиду этого ось абсцисс называется осью действительных чисел или, короче, действительной осью, а ось ординат — мнимой осью. Так



Фиг. 152.

как точка A (фиг. 152) вполне определяет вектор OA, где под словом вектор разумеется отрезок прямой, имеющий определенное направление

---

1) То же значение в записи (a, b) имеют скобки; роль символа i играет тут условие — писать ординату b на втором месте.

(в данном случае от точки O к точке A), то комплексное число $a+ib$ можно изображать при помощи вектора OA.

Положение точки A можно определить также при помощи полярных координат, причем радиус-вектор ϱ и амплитуда φ называются модулем и аргументом комплексного числа:

$$a+ib=\varrho\cos\varphi+i\varrho\sin\varphi.$$

Последнее выражение принято писать в таком виде:

$$a+ib=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где модуль

$$\varrho=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

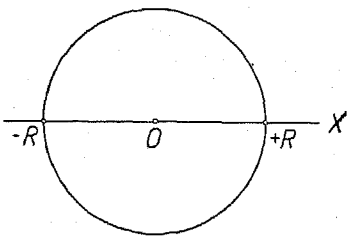
В элементарной алгебре указывается, как совершать действия с комплексными числами; при помощи геометрического изображения их можно эти действия производить графически.

§ 2. Обобщение понятия о степени.

Возьмем степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

где z, a_0, a_1, a_2, ... — комплексные числа. Оказывается, что изложенные выше (часть седьмая, § 5) свойства степенного ряда сохраняют свою силу, если обобщим понятие интервала сходимости, разумея под ним (фиг. 153) круг сходимости, ограниченный окружностью, описанной из начала координат радиусом $R=lim\frac{A_n}{A_{n+1}}$, где A_n—модуль комплексного числа $a_n=\alpha_n+i\beta_n$, т.-е. $\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$. Вследствие этого ряды



Фиг. 153.

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots,$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots,$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$$

сходятся для всех (как комплексных, так, в частности, и действительных) значений z и определяют целые функции не только в случае действительного z (часть седьмая, § 3), но и в случае комплексного.

Мы доказали (часть седьмая, § 6), что в случае действительного аргумента z выписанные три ряда представляют разложения соответственно функций e^z, $\cos z$ и $\sin z$, т.-е. мы доказали, что в случае действительного z существуют равенства

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = 1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots \tag{3}$$

Поэтому совершенно естественно в случае комплексного z эти ряды считать за определения функций e^z, $\cos z$ и $\sin z$. Таким образом, примем равенства (1), (2) и (3) за определения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ для комплексного аргумента $z = x + iy$; тогда равенство (1) представляет обобщение понятия о степени на случай комплексного показателя.

Заменим в равенстве (1) z через iz:

$$e^{zi} = 1 + \frac{zi}{1!} + \frac{z^2i^2}{2!} + \frac{z^3i^3}{3!} + \frac{z^4i^4}{4!} + \frac{z^5i^5}{5!} + \frac{z^6i^6}{6!} + \ldots\ldots;$$

так как $i^2 = -1$; $i^3 = -i$ и $i^4 = 1$, то получаем

$$e^{zi} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\right)$$

или

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Эта формула Эйлера дает замечательную связь между показательной и тригонометрической функциями.

Мы опустим доказательство того, что в случае комплексных показателей, как и в случае действительных, существует равенство $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Так как из этого равенства, а также из того обстоятельства, что $e^0 = 1$, вытекают все свойства функции e^x с действительным показателем, то отсюда следует, что они распространяются и на случай комплексного показателя.

Формула Эйлера связывает показательную функцию с периодическими — синусом и косинусом; покажем, что она тоже периодическая и имеет своим периодом $2\pi i$. В самом деле, пусть, как и выше, $z = x + iy$, где x и y — действительные числа. Тогда

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y);$$

отсюда, обозначая через k целое число, получаем

$$e^{z + 2\pi k i} = e^{x + i(y + 2k\pi)} = e^x [\cos (y + 2k\pi) + i \sin (y + 2k\pi)] =$$
$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

§ 3. Гиперболические функции.

Положим в формуле Эйлера $e^{zi}=\cos z+i\sin z$, вместо z, $-z$: $e^{-zi}=\cos z-i\sin z$; определим из этих двух уравнений $\cos z$ и $\sin z$:

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{zi}+e^{-zi}) \quad \text{и} \quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{zi}-e^{-zi}).$$

Заменим z через zi:

$$\cos(zi)=\frac{1}{2}(e^{-z}+e^{z}), \tag{4}$$

$\sin(zi)=\frac{1}{2i}(e^{-z}-e^{z})$ или

$$\frac{\sin(zi)}{i}=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}). \tag{5}$$

Функция (4), как мы видели (часть третья, гл. I, § 6), — **гиперболический косинус** $\cosh z$, а функция (5) — **гиперболический синус** $\sinh z$:

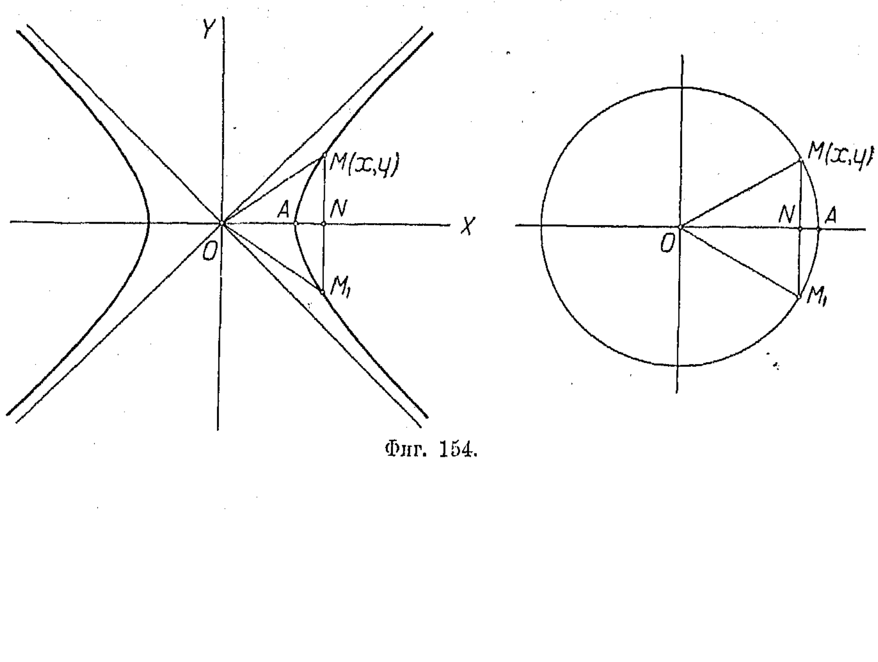
$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

Легко сообразить, что всякой формуле обычной тригонометрии соответствует формула гиперболической тригонометрии. Например,

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=\frac{1}{4}(e^{2z}+e^{-2z}+2)-\frac{1}{4}(e^{2z}+e^{-2z}-2)=1.$$

Сравнивая эту формулу с формулой $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, мы видим, что **формулы гиперболической тригонометрии получаются из формулы обычной путем замены** $\cos z$ через $\cosh z$ и $\sin z$ через $i\sinh z$

Функции $x=\cosh z$ и $y=\sinh z$ потому называются гиперболическими, что они играют ту же роль для равносторонней гиперболы $x^2-y^2=1$, какую для круга $x^2+y^2=1$ функции $x=\cos z$ и $y=\sin z$.



Фиг. 154.

В самом деле, определим площадь σ сектора OMA равносторонней гиперболы (фиг. 154); она равняется площади $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}$ треугольника OMN без площади AMN, т.-е. без $\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx$, но

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\Big|_1^x (x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|) =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|;$$

следовательно, $\sigma = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$ или $\sigma = \frac{1}{2}\ln|x+y|$, откуда

$$x+y = e^{2\sigma};$$

так как $1 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = e^{2\sigma}(x-y)$, то

$$x - y = e^{-2\sigma};$$

решаем полученные два уравнения относительно x и y:

$$x = \frac{e^{2\sigma}+e^{-2\sigma}}{2} = \cosh(2\sigma),\ y = \frac{e^{2\sigma}-e^{-2\sigma}}{2} = \sinh(2\sigma);$$

полагая $2\sigma = z$, получаем

$$x = \cosh z, \quad y = \sinh z.$$

Тем же путем мы могли бы получить $x = \cos(2\sigma)$ и $y = \sin(2\sigma)$, где σ — площадь сектора OMA круга (фиг. 154); но гораздо проще сообразить, что $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, где φ — дуга AM круга, и что площадь сектора $\sigma = \frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{1}{2}\varphi$, где $r = 1$ — радиус круга.

ТАБЛИЦА ФОРМУЛ.

Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Расстояние d между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2. Координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок с концами в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в отношении $k = \frac{AC}{CB}$,

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

3. Формулы перенесения начала координат в точку $(\overline{x}, \overline{y})$

$$x = x' + \overline{x}, \quad y = y' + \overline{y}.$$

4. Формулы вращения системы координатных осей на угол α

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

5. Уравнение прямой, проходящей через начало координат,

$$y = kx.$$

6. Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к асимптотам,

$$y = \frac{k}{x}.$$

7. Уравнение круга радиуса a с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

8. Уравнение эллипса с полуосями a и b, отнесенного к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

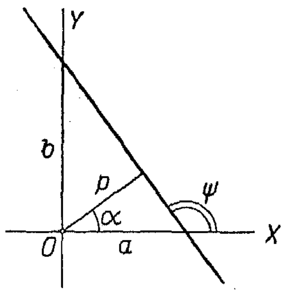
9. Уравнения сопряженных гипербол с полуосями a и b, отнесенных к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

10. Уравнение параболы, отнесенной к оси симметрии и касательной в вершине,

$$y^2=2px,$$

где параметр p представляет расстояние от фокуса порaболы до ее директрисы.



11. Различные виды уравнения прямой

$$Ax+By+C=0,$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$y=kx+b,$$

где

$$\cos\alpha=MA,\quad \sin\alpha=MB,\quad M=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad k=tg\psi.$$

12. Расстояние d от точки (x_1, y_1) до прямой

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p.$$

13. Угол φ между двумя прямыми

$$tg\varphi=\frac{k'-k}{1+kk'},\quad tg\varphi=\frac{AB'-A'B}{AA'+BB'}.$$

14. Условие параллельности двух прямых

$$k'=k,\quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}.$$

15. Условие слияния двух прямых

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

16. Условие перпендикулярности двух прямых

$$k' = -\frac{1}{k}, \quad AA' + BB' = 0.$$

17. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_1, y_1) по данному направлению k,

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

18. Уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и $(x_2\ y_2)$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

19. Классификация кривых второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

$$\delta < 0 \text{ — эллипс}, \quad \delta = 0 \text{ — парабола}, \quad \delta > 0 \text{ — гипербола},$$

где

$$\delta = B^2 - 4AC.$$

20. Эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{c}{a},$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — половина фокусного расстояния.

21. Эксцентриситет гиперболы

$$e = \frac{c}{a},$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — половина фокусного расстояния.

22. Уравнения асимптот гиперболы, отнесенной к осям симметрии,

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

23. Связь декартовых координат x и y с полярными ρ и φ той же точки при совпадении полюса с началом координат и полярной оси с осью X

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Аналитическая геометрия в пространстве.

24. Расстояние d между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

25. Координаты точки $C(x, y, z)$, делящей отрезок с концами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $k = \frac{AC}{CB}$,

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}.$$

26. Соотношение между направляющими косинусами прямой

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{или} \quad \Sigma\cos^2\alpha = 1.$$

27. Проекции отрезка AB на координатные оси

$$x_2 - x_1 = d\cos\alpha, \quad y_2 - y_1 = d\cos\beta, \quad z_2 - z_1 = d\cos\gamma.$$

28. Угол φ между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

или

$$\cos\varphi = \Sigma\cos\alpha\cos\alpha'.$$

29. Различные виды уравнений плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где

$$\cos\alpha = MA, \quad \cos\beta = MB, \quad \cos\gamma = MC, \quad M = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

30. Угол φ между двумя плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

31. Различные виды систем уравнений прямой

$$x = mz + a, \quad y = nz + b,$$

$$\frac{x - x_1}{M} = \frac{y - y_1}{N} = \frac{z - z_1}{P},$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

где

$$\cos\alpha = LM, \quad \cos\beta = LN, \quad \cos\gamma = LP, \quad L = \frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}.$$

32. Угол φ между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \frac{MM' + NN' + PP'}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}\ \sqrt{M'^2+N'^2+P'^2}}.$$

33. Угол φ между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{AM + BN + CP}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}.$$

34. Уравнение эллипсоида, отнесенного к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

35. Уравнения эллипсоидов вращения и сферы

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

36. Уравнение однополостного гиперболоида, отнесенного к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

37. Уравнение конуса второго порядка, отнесенного к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

38. Уравнение однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

39. Уравнения систем прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l_1\left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad \text{и} \quad l_1\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l_2\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad \text{и} \quad l_2\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}.$$

40. Уравнение двуполостного гиперболоида, отнесенного к осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

41. Уравнения эллиптического и гиперболического параболоидов, отнесенных к вершине,

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

42. Уравнения цилиндров второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

Анализ.

Часть первая.

1. $lim\,(u+v-w)=lim\,u+lim\,v-lim\,w.$

2. $lim\,uvw=lim\,u\cdot lim\,v\cdot lim\,w.$

3. $lim\,cu=c\,lim\,u.$ 4. $lim\,\frac{u}{v}=\frac{lim\,u}{lim\,v}.$

5. Если $x>y>z$ и $lim\,x=lim\,z$, то $lim\,y=lim\,x=lim\,z$.

6. $lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ 7. $lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2{,}718\ldots$

Часть вторая.

Глава I.

8. $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mathrm{tg}\alpha,$

где α — угол касательной с осью X.

9. $(c)'=0.$
10. $(x)_x'=1.$
11. $y_t'=y_x'\,x_t'$
12. $y_x'=\frac{1}{x_y'}.$
13. $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}.$
14. $(u+v-w)'=u'+v'-w'.$
15. $(u+c)'=u'.$
16. $(uv)'=u'v+uv'.$
17. $\frac{(uvw)'}{uvw}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}.$
18. $(cu)'=cu'.$
19. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$
20. $(x^a)'=ax^{a-1}x'.$
21. $(a^x)'=a^x\ln a\cdot x'$
22. $(e^x)'=e^x x'.$
23. $(lg_a|x|)'=\frac{x'}{x\ln a}.$
24. $(\ln|x|)'=\frac{x'}{x}.$
25. $(\sin x)'=\cos x\cdot x'.$
26. $(\cos x)'=-\sin x\cdot x'.$
27. $(\mathrm{tg}x)'=\frac{x'}{\cos^2 x}.$
28. $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{x'}{\sin^2 x}.$
29. $(\arcsin x)'=\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}.$
30. $(\arccos x)'=-\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}.$
31. $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{x'}{1+x^2}.$
32. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{x'}{1+x^2}.$

33. $$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=(y')'=[f'(x)]'=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=$$
$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right].$$

Глава II.

34. $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, где $a<c<b$;

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\vartheta h)$, где $0<\vartheta<1$.

35. $$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c);$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+$$
$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x).$$

Глава IV.

36. $$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если $f(a)=\varphi(a)=0$ или $f(a)=\varphi(a)=\infty$.

Глава V.

37. $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\vartheta x}.$$

38. $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+$$
$$+(-1)^k\frac{x^{2k}\cos(\vartheta x)}{(2k)!}.$$

39. $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+$$
$$+(-1)^k\frac{x^{2k+1}\cos(\vartheta x)}{(2k+1)!}.$$

40. $$\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\vartheta x)^n}.$$

41. $$(1+x)^a=1+\frac{a}{1}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$
$$+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n(1+\vartheta x)^{a-n}.$$

Глава VI.

42. $dc = 0$.

43. $dx = \Delta x$, если x независимое переменное.

44. $dy = f'(x)\,dx$, где $dx = \Delta x$ или $dx = x_t'\,dt$.

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = dy : dx$.

46. $d(u + v - w) = du + dv - dw$.

47. $d(u + c) = du$.

48. $d(uv) = v\,du + u\,dv$.

49. $d(cu) = c\,du$.

50. $d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

51. $d(x^a) = ax^{a-1}\,dx$.

52. $da^x = a^x \ln a\,dx$.

53. $de^x = e^x\,dx$.

54. $d\lg_a |x| = \frac{dx}{x \ln a}$.

55. $d\ln|x| = \frac{dx}{x}$.

56. $d\sin x = \cos x\,dx$.

57. $d\cos x = -\sin x\,dx$.

58. $d\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

59. $d\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

60. $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

61. $d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

62. $d\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{dx}{1 + x^2}$.

63. $d\,\mathrm{arcctg}\,x = -\frac{dx}{1 + x^2}$.

64. $d^2y = d^2f(x) = d(dy) = d[df(x)] = y''\,dx^2 = f''(x)\,dx^2$, если $dx = \Delta x$.

65. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}y = d^2y : dx^2$, если $dx = \Delta x$.

66. $d^2x = 0$, если $dx = \Delta x$.

Часть третья.

Глава I.

67. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$; $dF(x) = f(x)\,dx$.

68. $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$.

69. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

70. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$.

71. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

72. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

73. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

74. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$.

75. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$.

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$

78. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C.$

79. $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$

80. $\int (u+v-w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx.$

81. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$ 82. $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$

Глава II.

83. $\sigma = \int_a^b f(x)\,dx = lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \mathop{\mathbf{S}}_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$

84. $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$

85. $\sigma = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big|_a^b F(x) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}.$

86. $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

87. $\int_a^b (u+v-w)\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx - \int_a^b w\,dx\,.$

88. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$ где $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$.

89. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$ 90. $\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a)\,.$

91. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$

92. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f'(c),$ где $a<c<b.$

93. $\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2\,d\varphi.$

94. $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$ 95. $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}.$

96. $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi.$ 97. $ds = \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2}\,d\varphi.$

98. $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,.$ 99. $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}\,.$

100. $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - d^2x\,dy} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\,.$

Часть четвертая.

101. $z = f(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y = \text{пост}}$

102. $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, где x и y — или независимые переменные или функции.

103. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$, где $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

104. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Часть пятая.

Глава I.

105. $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$, где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Глава II.

106. $\cos a = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos b = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$

$$\cos c = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

107. $v = \int_a^b \sigma(x)\, dx$.

108. $v = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z\, dx$.

109. $v = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$.

Часть шестая.

Глава I.

110. $v = \iint_\sigma f(x, y)\, d\sigma = lim_{n\to\infty} \mathop{S}_a^b f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta\sigma_i$.

Глава III.

111. $v = \iint_\sigma f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z\, dx = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} z \rho\, d\varphi$.

112. $\Sigma = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

Глава V.

113. $S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}\, dx, \quad S_y = \int_a^b x\,\{f_2(x) - f_1(x)\}\, dx;$

$J_x = \frac{1}{3}\int_a^b \{[f_2(x)]^3 - [f_1(x)]^3\} dx, \quad J_y = \int_a^b x^2\,\{f_2(x) - f_1(x)\}\, dx.$

Часть восьмая.

114. $\sigma = \int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right).$

115. $\sigma = \int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) +$

$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})].$

Часть девятая.

116. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$

117. $\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$

118. $e^{zi} = \cos z + i \sin z.$

УКАЗАТЕЛЬ.

(Числа обозначают страницы книги.)

А

Абсолютная величина 4.
Абсолютно сходящийся ряд 248.
Алгебраическая функция 25.
Амплитуда гармонического колебания 153.
Аргумент 21.
— комплексного числа 268.
Аркускосинус 31, 45, 92, 104, 110.
Аркускотангенс 32, 45, 92, 104, 110.
Аркуссинус 30, 44, 92, 104, 110, 257.
Аркустангенс 31, 45, 92, 104, 110, 257.
Архимедова спираль, касательная 141.
—, квадратура 132.
—, радиус кривизны 145.
—, спрямление 137.

Б

Бесконечно большая 13.
Бесконечно малая 13.
— главная 85.
— первого порядка 85.
Бином Ньютона 81, 256.
Биномиальные коэффициенты 48.
Бинормаль 192, 197.

В

Величина абсолютная 4.
— бесконечно большая 13.
— бесконечно малая 13.
— переменная 12.
— постоянная 12.
Ветвь функции 22.
Винтовая линия 195, 197, 199, 200, 205.
Вогнутость 65.
Возрастающая последовательность 6.
— **функция** для данного значения аргумента 59.
— в интервале 61.
Второй дифференциал 92, 173.
— кривизна 193, 202.
— производная 47, 171.
Выпрямляющая плоскость 192.
Выпуклость 65.
Выражение неопределенное 69.
Высшие дифференциалы 92, 173.
— производные 47, 171.

Г

Гармоническое колебание 153.
— ряд 243.
Геометрическое значение дифференциала 88.
— комплексного числа 267.
— натурального логарифма 128.
— неопределенного интеграла 101, 102.
— определенного интеграла 112.
— производной 33.
— функции 22.
— частной производной первого порядка 166.
Геометрический ряд 83, 242.
Гипербола, спрямление 136, 259.
Гиперболический косинус 107, 108, 111, 154, 270.
— логарифм 128.
— синус 107, 108, 111, 154, 240.
— параболоид 181, 211.
Главная бесконечно малая 85.
— нормаль 192, 199.
— часть бесконечно малой 85.

Д

Двойной интеграл 215.
Двукратный интеграл 209.
Действительное число 267.
Дифференциал второго порядка 92, 173.
— высшего порядка 92, 173.
— дуги 133, 195.
— первого порядка 88, 165, 166, 167, 169.
— полный 166, 167, 169, 173.
— частный 165.
Дифференциальное выражение 188.
— исчисление 33.
— **уравнение** второго порядка 151.
— линейное 149, 156.
— неоднородное 152, 156.
— однородное 149, 150, 151, 156.
— первого порядка 148.
— полное 156, 159.
— с частными производными 166, 176.
Дифференцирование 33.
— **интеграла** по верхнему пределу 116.
— по нижнему пределу 125.
— по параметру 223.
Дифференцируемая функция 33.
Длина дуги кривой 132, 136, 193.
Долгота 234.

Е

e (число) 8, 12, 19, 20, 42, 78.

З

Замена переменных 94, 174.

И

Интеграл двойной 215.
— двукратный 209.

— неопределенный 101.
—, обобщение понятия 105, 107.
— общий 131, 132, 147.
— определенный 114.
— простой 225, 230.
— особый 133.
— трехкратный 233.
— тройной 231.
— Френеля 106.
— частный 147.
Интегральное исчисление 99.
— косинус 106.
— кривая 101.
— логарифм 100, 106.
— синус 106, 262.
Интегрирование 99.
— непосредственное 106.
— подстановкой 109, 123.
— по параметру 222.
— по частям 109, 124.
— разложением 107, 122.
Интервал сходимости 250.
— элементарный 112.
Иррациональная функция 27.
— число 4.
Истинное значение функции 69.

К

Касательная плоскость 204.
— **прямая** 35, 137, 140, 191, 196.
— винтовой линии 197.
— логарифмической спирали 141.
— параболы 139.
— равносторонней гиперболы 138.
— спирали Архимеда 141.
— циклоиды 139.
— эллипса 138.
Квадратура параболы 129.
— равносторонней гиперболы 128.
— спирали Архимеда 132.
— циклоиды 129.
— эллипса 127.
Колеблющаяся последовательность 6.
Компланация 226.
Комплексное число 267.
Косеканс 109.
Косинус 30, 43, 48, 79, 83, 91, 103.
— гиперболический 107, 108. 111, 154, 270.
— интегральный 106.
— **направляющие** бинормали 192, 198.
— главной нормали 192, 200.
— касательной 191, 197.
— нормали к плоскости 204.
Котангенс 31, 44, 92, 109.
Коэффициент угловой касательной 35.
— главной части 86.
Кривая двоякой кривизны 191.
— огибающая 151.
— трапеция 102.
— цилиндр 208.
Кривизна кривой плоской 142.
— двоякой кривизны 193, 201, 202.
Круг кривизны 143, 193.
— соприкасающийся 143, 192.
Кручение 193.
Кубатура 225.

Л

Линейная функция 46.
— дифференциальное уравнение первого порядка 149, 159.
— второго порядка 151, 156.
Логарифм 29.
— натуральный 20, 128.
Логарифмическая производная 41, 47.
— функция 29, 43, 109, 128.
— **спираль** 146.
—, касательная 141.
—, радиус кривизны 146.

М

Максимум 60, 62, 64, 176, 178.
— пограничный 60.
Метод Лагранжа изменения произвольных постоянных 159.
— интегрирования по частям 109, 124.
— непосредственного интегрирования 100 106.
— подстановки 109, 123.
— разложения 107, 122.
Механический смысл производной 36, 49.
Минимум 59, 62, 176, 178.
— пограничный 60.
Мнимое число 267.
Модуль (действительного) числа 4.
— комплексного числа 268.
Момент инерции 238.
— полярный 238, 240.
— статический 236, 237.
Монотонная последовательность 6.

Н

Направляющие косинусы бинормали 192, 198
— главной нормали 192, 200.
— касательной 191, 197.
— нормали к плоскости 204.
Натуральный логарифм 20, 128.
Нахождение истинного значения функции 69.
Начало счета дуг 132.
Начальная фаза 153.
— функция 32.
Независимое переменное 21.

Неоднородное дифференциальное уравнение 156.
Неопределенное выражение 69.
— интеграл 101.
Непрерывное изменение 13.
— **функция** при данном значении аргумента 23.
— в данном интервале 24.
Несоизмеримое число 4.
Неявная функция 22, 186, производная 46, 49, 187.
Неэлементарная функция 100.
Нормаль главная 192, 199.
— плоской кривой 137, 138, 140.
— поверхности 203.
Нормальная плоскость 192, 196.

О

Область изменения переменной величины 12.
— сходимости ряда 249.
— существования функции 28, 29, 30, 31, 32.
Обобщение понятия определенного интеграла 118.
— площади 115.
— степени 268.
Обозначение дифференциала 88.
— модуля 4.
— неопределенного интеграла 101.
— определенного интеграла 114.
— производной 35.
Обратная функция 22, производная 39.
— тригонометрические функция 22.
Общий интеграл 146, 147.
— член ряда 241.
— член последовательности 3.
Огибающая кривая 151.
Однородная функция 149, 150.
— уравнение 149, 150, 151.
Окружность соприкасающаяся 143, 192, 193.
Определенный интеграл 114.
Определяющее уравнение 159.
Основные элементарные функции 27.
Особый интеграл 151.
Остаток, остаточный член в форме Коши 55.
— в форме Лагранжа 55.
— в формуле Маклорена 78.
— в формуле Тэлора 55, 77, 96, 186.
— ряда 242.

П

Парабола, касательная 139.
— , квадратура 129,
— подходящая 57.
— соприкасающаяся 57.
— , спрямление 136.
— , формула 263, 264.
Параболоид вращения, объем 213.
— гиперболический 181, объем 211.
— эллиптический 181.
Параметр, интеграла 222.
— кривой второго порядка 144.
Параметрические уравнения 39, 70.
— окружности 271.
— равносторонней гиперболы 271.
— эллипса 47, 128, 135.
Первоначальная функция 33.
Первообразная функция 33.
Переменная величина 12.
— интеграции 101.
Период 153, 269.
π (число) 257, 265.
Плоскость касательная 204.
— нормальная 192, 196.
— соприкасающаяся 191, 197.
Плотность 236, 238.
Площадь Архимедовой спирали 132.
— кривой 124, 131.
— параболы 129.
— поверхности 226.
— поверхности тела вращения 228.
— равносторонней гиперболы 127.
— циклоиды 129.
— эллипса 127.
Пограничный максимум 60.
— минимум 60.
Подкасательная 138, 140.
Подходящая парабола 57.
Подъинтегральная функция 101.
Показательная функция 29, 42, 48, 103.
Полный дифференциал 166, 167, 169, 173.
— линейное дифференциальное уравнение 156, 159.
— приращение функции 164.
Положительный ряд 244.
Порядок бесконечно малой 85.
— дифференциала 92, 173.
— производной 47, 171.
Последовательность 4.
— возрастающая 6.
— колеблющаяся 6.
— монотонная 6.
— убывающая 6.
Правило Лопиталя 69, 71.
Предел бесконечно малой 15.
— переменной 14.
— последовательности 35.
Предельное значение функции 24, 69.
Прерывное изменение 13.
Приближенное вычисление интегралов 261, 266.
— функции 78, 83.
Приборы 266.

Признак сходимости 244.
— Даламбера 245.
Примитивная функция 33.
Приращение переменной величины 12.
— функции 23, 34, 88, 89, 97.
— полное функции 164.
— частное функции 164.
Производная 33, 34.
— высшего порядка 49, 171.
— от неявной функции 46, 49, 187, 188.
— полная сложной функции 167.
— частная 164.
— **определенного интеграла** по верхнему пределу 116.
— по нижнему 125.
— по параметру 223.
Произвольное постоянное 101.

Р

Равномерная сходимость 249.
Равносторонняя гипербола, касательная 138.
— , квадратура 128, 271.
— , спрямление 136, 259.
Радиус сходимости 251.
— **кривизны** второй 193, 202.
— кривой второго порядка 144.
— логарифмической спирали 146.
— первой 193, 201.
— спирали Архимеда 146.
Разложение в ряд 83, 96, 254.
— косинуса 83, 255.
— логарифма 83, 256.
— обратных тригонометрических функций 257.
— показательной функции 83, 255.
— синуса 83, 255.
— степени бинома 83, 256.
— эллиптических интегралов 258, 259.
Разложение по формуле Тэлора 77, 96.
— интегрального синуса 262.
— косинуса 79.
— логарифма 80, 262.
— показательной функции 78.
— синуса 79.
— степени бинома 81.
— целой рациональной функции 77.
Раскрытие неопределенности 69.
Рациональная функция 26.
Ряд 83, 96, 241.
— абсолютно сходящийся 248.
— гармонический 243.
— геометрический 242.
— знакопеременный 249.
— знакопостоянный 244.
— Маклорена 84, 250.
— положительный 244.
— равномерно сходящийся 249.
— расходящийся 241.
— степенной 250.
— Тэлора 83, 97, 250.
— условно сходящийся 249.

С

Секанс 18, 109.
Синус 18, 30, 43, 48, 79, 83, 91, 103.
— гиперболический 107, 111, 154, 270.
— интегральный 106, 262.
Синусоида 30.
Скорость 36.
— расширения 37.
— реакции 37.
Сложная функция 21.
Соприкасающийся круг 143, 192, 193.
— окружность 143, 192, 193.
— парабола 57.
— плоскость 191, 197.
Спираль Архимеда 132.
— логарифмическая 141.
Спрямление гиперболы 136, 259.
— кривой 132, 193.
— параболы 13?.
— спирали Архимеда 137.
— циклоиды 136.
— эллипса 135, 258.
Статический момент 236, 237.
Степенной ряд 250.
— функция 28, 40, 43, 47, 91, 103.
Сходимость абсолютная 248.
— равномерная 249.
— рядов 241.
Сходящийся ряд 241.
— абсолютно 248.
— равномерно 249.
— условно 249.
Субнормаль 138, 140.
Субтангенс 138, 140.

Т

Тангенс 31, 44, 91, 109.
Тангенсоида 31.
Тангенциальные свойства гиперболы 138.
— параболы 139, 143, 145.
— эллипса 42, 138.
Тело вращения, объем 212.
—, поверхность 228.
Теорема Гюльдена 237, 238.
— Коши 53.
— Лагранжа 52.
— Маклорена 56.
— о конечных приращениях 52.
— о среднем значении 52, 126, 186.

— Ролля 50.
— Тэлора 54, 96, 184, 254.
Точка перегиба 67, 144.
— разрыва 6, 25.
Трансцендентная функция 27.
Трапеция кривая 102.
— криволинейная 102.
—, формула 263, 264.
Трекратный интеграл 233.
Тригонометрические функции 30, 32.
Тройной интеграл 231.

У

Убывающая последовательность 6.
— **функция** для данного значения аргумента 59, 61.
— в интервале 61.
Удельная теплота 37.
Ускорение 36, 49.

Ф

Формула бинома 81.
— замены переменного 105, 123.
— Коши 53.
— Лагранжа 52.
— Лейбница 48.
— Лопиталя 71.
— Маклорена 56.
— парабол 263, 264.
— Симпсона 263, 264.
— трапеций 263, 264.
— Тэлора 54, 55, 56, 96, 168, 184, 254.
— Эйлера 269.
Функция 26.
— алгебраическая 25.
— иррациональная 26
— круговые 22, 27, 30, 32.
— линейная 46.
— логарифмическая 29.
— многих переменных 22, 163.
— многозначная 22.
— непрерывная в точке 23.
— непрерывная в интервале 24.
— неявная 22, 186.
— неэлементарная 100.
— обратная 22.
— однозначная 22, 163.
— однородная 149, 150.
— основные элементарные 27.
— от функции 21.
— показательная 29.
— рациональная 26.
— рациональная целая 27.
— сложная 21.
— трансцендентные 27.
— тригонометрические 30, 32.
— целая 27, 248.
— явная 22.
— элементарная 27.

Х

Характеристическое уравнение 157

Ц

Целая рациональная функция 27.
— функция 248.
Центр кривизны 143.
— тяжести 236.
Циклоида, касательная 139.
—, квадратура 129.
—, радиус кривизны 145.
—, спрямление 136.
Цилиндр кривой 208.
—, касательная плоскость 205.
—, объем 206, 208, 215, 225.

Ч

Частный дифференциал 165.
— значение функции 24.
— интеграл 147.
— приращение 164.
— производная 164.
Число действительное 267.
— иррациональное 4.
— комплексное 267.
— мнимое 267.
— несоизмеримое 4.
— рациональное 3.
— соизмеримое 3.

Ш

Шаг винта 195.
Широта 234.

Э

Экстремум 62, 177.
— относительный 182.
Элементарный интервал 112.
— объем 230
— площадь 215.
— трапеция 112.
— цилиндр 316.
— функция 27.
Эллипс, касательная 42, 138.
—, квадратура 127.
—, спрямление 135, 258.
Эллипсоид, объем 208.
—, касательная плоскость 205.
Эллиптический интеграл 135, 258, 259.
— **параболоид** 181.
— вращения 213.